

# Breve introduzione alla Teoria dei Grafi

1 giugno 2011

AVVISO: I presenti appunti possono contenere (anzi sicuramente conterranno) errori e/o ripetizioni. Essi sono infatti opera di vari collage e, per ovvie questioni di tempo, non sono stati rivisti. Pertanto **non intendono sostituire alcun libro di teoria e/o esercizi** ma vogliono soprattutto essere un dettagliato programma del corso. Prego gli studenti di prestare particolare attenzione nella loro lettura e di informarmi sia direttamente che per e-mail ([quattrocchi@dmi.unict.it](mailto:quattrocchi@dmi.unict.it)) su qualunque errore (certo o sospetto) notato.

Cercherò di correggere nel più breve tempo possibile qualunque errore trovato. Pertanto questi appunti saranno continuamente aggiornati: la data dell'ultimo aggiornamento appare in prima pagina. Consiglio infine agli studenti di **non stamparli immediatamente** ma farlo il più tardi possibile (per lo meno alcuni giorni dopo che l'argomento sia stato trattato a lezione).

# Indice

1	Definizioni preliminari	3
2	Rappresentazioni di un grafo e di un digrafo	10
3	Isomorfismo fra grafi e fra digrafi	15
4	Alberi	19
5	Un'applicazione alla chimica	31
6	Grafi euleriani	33
7	Grafi hamiltoniani	35
8	Grafi planari	38
9	Colorazioni dei vertici di un grafo	46
10	Polinomio cromatico	48

# 1 Definizioni preliminari

**Definizione 1.1** Un digrafo (o grafo orientato o diretto)  $G$  è una coppia  $(V, E)$  dove  $V$  è un insieme non vuoto ed  $E$  una relazione binaria su  $V$ ,  $E \subseteq V \times V$ , ossia un insieme di coppie ordinate di elementi di  $V$ . Gli elementi di  $V$  sono chiamati vertici o nodi, gli elementi di  $E$  sono chiamati archi o spigoli orientati. Se l'insieme  $V$  è finito, il grafo dicesi finito. Se  $(a, b) \in E$ ,  $a$  il vertice iniziale e  $b$  il vertice finale; se il vertice finale coincide col vertice iniziale, cioè se  $(a, a) \in E$ , l'arco è detto cappio. Un esempio di digrafo è dato in Figura 1.

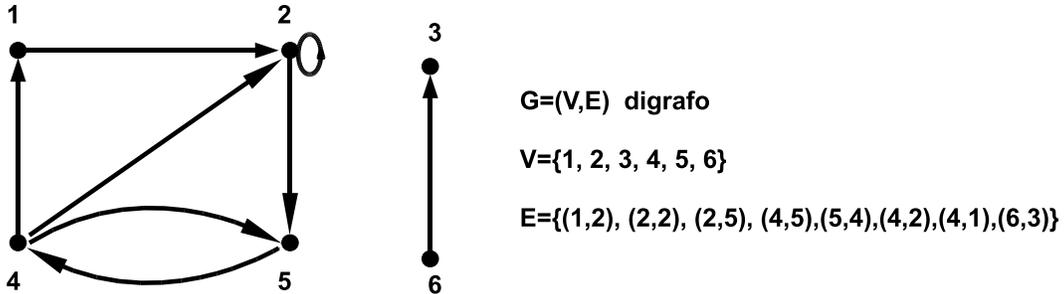


Figura 1

**Definizione 1.2** Un grafo (o grafo non orientato),  $G = (V, E)$ , è una coppia  $(V, E)$  dove  $V$  è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti vertici ed  $E$  è un insieme di coppie non ordinate di elementi di  $V$ , dette spigoli. Più precisamente uno spigolo è un insieme  $\{a, b\} \subseteq V$  tale che  $1 \leq |\{a, b\}| \leq 2$ . È possibile avere spigoli del tipo  $\{a\}$  (si usano scrivere come multiinsieme  $\{a, a\}$ ) che vengono chiamati cappi.

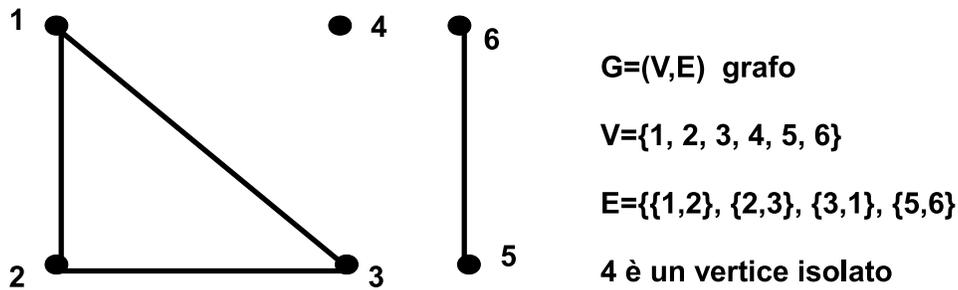


Figura 2

**Definizione 1.3** Un multigrafo (multidigrafo) è un grafo (digrafo)  $G = (V, E)$  che ha spigoli (archi) multipli, cioè due vertici sono estremi di più spigoli (archi). In tal caso  $E$  è un multiinsieme.

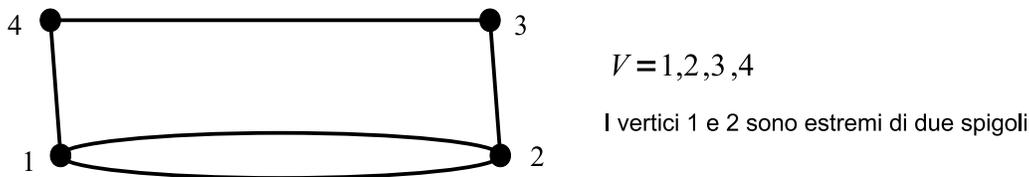


Figura 3

Se  $(u, v)$  è un arco di un digrafo, si dice che  $(u, v)$  è *incidente da*  $u$  o che *lascia*  $u$  ed è *incidente a*  $v$  o che *entra* nel vertice  $v$ . Diremo anche che il vertice  $v$  è *adiacente al* vertice  $u$ . Per esempio gli archi che lasciano il vertice 2 nel digrafo di Figura 1 sono  $(2, 2)$  e  $(2, 5)$ , o, equivalentemente, 2 è adiacente a 2 e 5 è adiacente a 2; gli archi che entrano in 2 sono  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$  e  $(4, 2)$ , o, equivalentemente, il vertice 2 è adiacente a 1, a 2 ed a 4. Sempre in Figura 1 si osservi ancora che, per esempio, il vertice 2 non è adiacente ad 1 perchè  $(2, 1)$  non è un arco del digrafo.

Se  $\{a, b\}$  è uno spigolo di un grafo, si dice che  $\{a, b\}$  è *incidente nei vertici*  $a$  e  $b$ . Per esempio nel grafo di Figura 2, gli spigoli incidenti nel vertice 2 sono  $\{1, 2\}$  e  $\{2, 3\}$ . Diremo inoltre che i vertici  $a$  e  $b$  sono *adiacenti* o *confinanti*. Nel grafo di Figura 2, i vertici 1 e 2 sono adiacenti perchè è presente lo spigolo  $\{1, 2\}$ . I vertici 1 e 5 non sono invece adiacenti. La relazione di adiacenza in un grafo è simmetrica mentre non lo è in un digrafo.

In questa breve introduzione alla teoria dei grafi supporremo sempre che  $V$  sia un insieme finito e che non vi siano cappi. Pertanto, **qualora non specificato diversamente tutti i grafi, multigrafi, digrafi o multidigrafi che considereremo in seguito sono finiti e non hanno cappi.**

**Definizione 1.4 Grado di un vertice.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo o un multigrafo. Il grado di un vertice  $x \in V$  in  $G$  è il numero,  $d_G(x)$ , di spigoli incidenti con esso. Se  $d_G(x) = 0$ ,  $x$  si dice *isolato*; se  $d_G(x) = 1$ ,  $x$  è detto *vertice pendente*.

Per semplicità scriveremo  $d(x)$  invece di  $d_G(x)$  se questo non crea alcuna confusione.

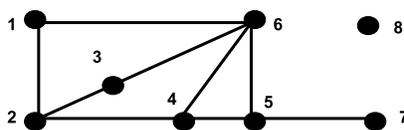


Figura 4

Nel grafo di Figura 4 si ha  $d(8) = 0$  (8 è un vertice isolato),  $d(7) = 1$  (7 è un vertice pendente),  $d(1) = d(3) = 2$ ,  $d(2) = d(4) = d(5) = 3$  e  $d(6) = 4$ .

**Teorema 1.1** *In un grafo o multigrafo finito si ha:*

1.  $2|E| = \sum_{x \in V} d(x)$ .
2. Il numero di vertici di grado dispari è pari.

**Definizione 1.5** Un grafo o multigrafo i cui vertici hanno tutti lo stesso grado  $d$  si dice regolare di grado  $d$ . Un grafo finito regolare di grado  $d$  con  $n$  vertici ha  $\frac{nd}{2}$  spigoli.

I seguenti grafi sono regolari di grado rispettivamente 1, 2, 3, 4.

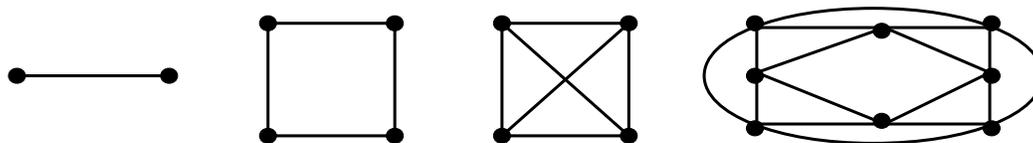


Figura 5

**Definizione 1.6** Un grafo si dice completo se ha tutti gli spigoli possibili; un grafo completo con  $n$  vertici è regolare di grado  $n - 1$  e viene indicato con  $K_n$ .

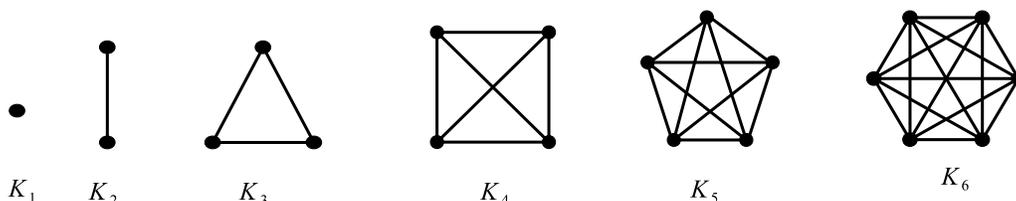


Figura 6

Un grafo completo con  $n$  vertici ha esattamente  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  spigoli.

**Definizione 1.7** Un multigrafo si dice completo e di indice  $\lambda$  se ha tutti gli spigoli possibili, ognuno ripetuto  $\lambda$  volte. Un multigrafo completo con  $n$  vertici ed indice  $\lambda$  è regolare di grado  $\lambda(n - 1)$  e viene indicato con  $\lambda K_n$ .

Un multigrafo completo con  $n$  vertici ed indice  $\lambda$  ha esattamente  $\lambda \binom{n}{2} = \frac{\lambda n(n-1)}{2}$  spigoli.

**Definizione 1.8** Dicesi sottografo del grafo  $G = (V, E)$  un grafo  $H = (W, F)$  tale che  $W \subseteq V$  e  $F \subseteq E$ .

In Figura 7,  $L$  è sottografo di  $H$  ed entrambi sono sottografi di  $G$ . Si osservi che in  $H$  l'insieme  $F$  degli spigoli coincide con tutti gli spigoli di  $G$  che sono incidenti nei vertici di  $W = \{1, 2, 3, 4\} \subset V$ . In tal caso diremo che  $H$  è il sottografo indotto dai vertici di  $W$ .

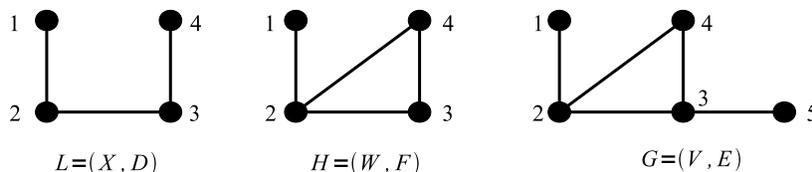


Figura 7

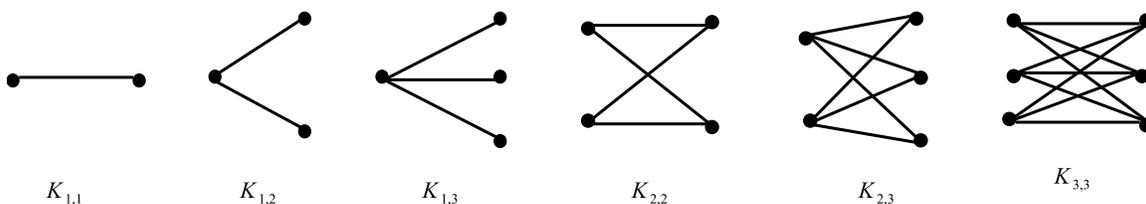
**Definizione 1.9** Un grafo si dice bipartito se: 1) l'insieme dei suoi vertici  $V$  può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti  $V_1$  e  $V_2$  (cioè  $V = V_1 \cup V_2$  e  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ); 2) ogni spigolo unisce un vertice di  $V_1$  con un vertice di  $V_2$ .

**Definizione 1.10** Un grafo bipartito si dice completo se contiene tutti i possibili spigoli fra  $V_1$  e  $V_2$ .

In particolare se  $m$  e  $n$  sono interi positivi, posto  $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , il grafo bipartito completo  $K_{n,m}$  è il grafo tale che

$$V = V_1 \cup V_2 \text{ e } E = \{s_{ij} = \{a_i, b_j\} \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Si osservi che  $K_{n,m}$  ha  $n + m$  vertici e  $nm$  spigoli.



**Figura 8**

**Definizione 1.11** Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Si chiama cammino (ingl. walk) di lunghezza  $t$  e di estremi  $u_1$  e  $u_{t+1}$  (o che congiunge i vertici  $u_1$  e  $u_{t+1}$ ) una sequenza

$$\langle u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_t, e_t, u_{t+1} \rangle, \quad (1)$$

dove  $t \geq 0$ ,  $u_i$  è un vertice di  $V$  ed ogni  $e_i$  è lo spigolo  $\{u_i, u_{i+1}\}$ . Il cammino (1) si dice chiuso se  $u_1 = u_{t+1}$ , cioè il primo e l'ultimo vertice coincidono.

Per  $t = 0$ , (1) diventa  $\langle u_1 \rangle$ , che è un cammino di lunghezza zero. Spesso elencare gli spigoli di un cammino è superfluo, così (1) può essere più semplicemente scritto come

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_{t+1} \rangle.$$

Si osservi che un cammino può avere sia spigoli che vertici ripetuti.

**Definizione 1.12** Un cammino si dice semplice se non contiene spigoli ripetuti.

**Definizione 1.13** Un cammino si dice elementare se non contiene vertici ripetuti con l'eventuale eccezione del primo ed ultimo vertice (che potrebbero essere uguali).

**Definizione 1.14** Dicesi path un cammino elementare che ha tutti i vertici distinti (cioè non è chiuso).

**Definizione 1.15** *Dicesi ciclo un cammino elementare chiuso. Dicesi lunghezza di un ciclo il numero dei suoi spigoli.*

Un grafo senza cicli dicesi *aciclico*.

**Definizione 1.16** *Un grafo  $G = (V, E)$  si dice connesso se, comunque presi due vertici  $x, y \in V$ , esiste almeno un cammino che li congiunge (cioè di estremi  $x$  e  $y$ ). Un grafo che non è connesso dicesi sconnesso.*

Il grafo di Figura 2 (pag. 3) non è connesso.

**Definizione 1.17** *In un grafo connesso  $G$  dicesi distanza di due vertici  $x$  e  $y$  la lunghezza minima dei cammini di estremi  $x$  e  $y$ .*

**Definizione 1.18** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Se  $a \in V$ , l'insieme  $C_a$  formato da tutti i vertici  $x \in V$  per i quali esiste un cammino da  $a$  a  $x$  dicesi componente connessa di  $a$ .*

Sia  $\sim$  la relazione su  $V$  così definita:

$$\forall a, x \in V, a \sim x \Leftrightarrow \text{esiste un cammino in } G \text{ da } a \text{ ad } x.$$

È facile verificare che  $\sim$  è una relazione di equivalenza su  $V$  e per ogni  $a \in V$  gli elementi ad esso equivalenti costituiscono la componente connessa di  $a$ . Ne segue che le varie componenti connesse formano una partizione dell'insieme  $V$  dei vertici, e ovviamente non c'è alcuno spigolo che colleghi vertici appartenenti a componenti connesse distinte. Un grafo  $G$  è connesso se e solo se è costituito da una sola componente connessa.

**Definizione 1.19** *Dicesi numero di connessione di un grafo  $G$  il numero delle sue componenti connesse.*

**Teorema 1.2** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso. Allora per ogni coppia  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ , esiste un path di estremi  $u$  e  $v$ .*

**Dimostrazione.** Poichè  $G$  è connesso, esiste un cammino di estremi  $u$  e  $v$ . Sia

$$c = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle,$$

con  $x_1 = u$  e  $x_n = v$ , un cammino di estremi  $u$  e  $v$  avente lunghezza minima. Questo cammino è elementare. In caso contrario esisterebbero almeno due vertici  $x_i$  e  $x_j$ , con  $1 \leq i < j$ , tali che  $x_i = x_j$ . Dalla successione

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n$$

rimuoviamo la successione  $x_i, \dots, x_{j-1}$ . Otteniamo il cammino  $\langle x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_n \rangle$  avente lunghezza minore di quella di  $c$  contrariamente al fatto di aver supposto che la lunghezza di  $c$  fosse minima. ■

**Definizione 1.20** Sia  $G = (V, E)$  un digrafo. Si dice *grado-in* (ingl. *in-degree*) di un vertice  $v$ , e si denota con  $d_G^+(v)$ , il numero di archi di  $G$  che hanno  $v$  come vertice finale. Analogamente, si dice *grado-out* (ingl. *out-degree*) di un vertice  $v$ , e si denota con  $d_G^-(v)$ , il numero di archi di  $G$  che hanno  $v$  come vertice iniziale. Dicesi *grado* di  $v$  la somma  $d_G(v) = d_G^-(v) + d_G^+(v)$ .

In Figura 1 si ha, per esempio,  $d_G^-(2) = 2$ ,  $d_G^+(2) = 3$ ,  $d_G(2) = 5$ .

**Teorema 1.3** Sia  $G = (V, E)$  un digrafo. Allora

$$\sum_{v \in V} d_G^-(v) = \sum_{v \in V} d_G^+(v).$$

**Definizione 1.21** Sia  $G = (V, E)$  un digrafo. Il digrafo  $J = (W, B)$  dicesi *sottodigrafo* di  $G$  se  $W \subseteq V$  e  $B \subseteq E$ . Se  $B$  coincide con tutti gli archi di  $E$  aventi entrambi i vertici (quello iniziale e quello finale) in  $W$ , diremo che  $J = (W, B)$  è un *sottodigrafo indotto*.

**Definizione 1.22** Sia  $G = (V, E)$  un multidigrafo. Se si sostituisce ogni arco  $(a, b) \in E$  con lo spigolo  $\{a, b\}$  si ottiene un multigrafo che indichiamo con  $|G|$  e chiamiamo, usando la terminologia inglese, *underlying multigrafo* di  $G$ . Se, inoltre, in  $|G|$  si sostituiscono gli eventuali spigoli paralleli con un solo spigolo si ottiene un grafo che indichiamo con  $(G)$  e chiamiamo *underlying grafo*.

**Definizione 1.23** Sia  $G = (V, E)$  un multigrafo. Dicesi *orientazione* di  $G$  un qualsiasi multidigrafo  $H$  tale che  $|H| = G$ . Se ogni spigolo  $\{a, b\} \in E$  si sostituisce con i due archi  $(a, b)$  e  $(b, a)$  si ottiene il multidigrafo  $\vec{G}$ , detto *l'orientazione completa* di  $G$ .

**Definizione 1.24** Un digrafo  $G = (V, E)$  si dice *simmetricamente completo* se per ogni  $u, v \in V$  con  $u \neq v$ , si ha  $(u, v), (v, u) \in E$ . Ovviamente, se  $|V| = n$ , allora  $|E| = 2 \binom{n}{2} = n(n-1)$ .

Nei digrafi la nozione di cammino (*cammino semplice*, *cammino elementare*, *path* e *ciclo*) può avere differenti interpretazioni a seconda se si vuole che gli archi siano tutti orientati nella stessa direzione o no. Nel primo caso parleremo di cammini orientati, nel secondo useremo la stessa terminologia introdotta per i grafi. Innanzitutto si osservi che le varie definizioni di cammino date per un grafo possono ripetersi in modo del tutto analogo per un multigrafo. Sia adesso  $G = (V, E)$  un digrafo. La sequenza

$$\langle u_1, a_1, u_2, a_2, \dots, u_t, a_t, u_{t+1} \rangle, \quad (2)$$

ove con  $a_i$  si indica o l'arco  $(u_i, u_{i+1})$  oppure  $(u_{i+1}, u_i)$ , dicesi *cammino*, *cammino semplice*, *cammino elementare*, *path* o *ciclo* se la sequenza ottenuta sostituendo in (2)  $\{u_i, u_{i+1}\}$  al posto di  $a_i$  è rispettivamente un *cammino*, *cammino semplice*, *cammino elementare*, *path* o *ciclo* nell'*underlying* multigrafo  $|G|$ .

**Definizione 1.25** *Un digrafo si dice connesso se per ogni paio di vertici  $u$  e  $v$  esiste (almeno) un cammino di estremi  $u$  e  $v$ .*

Consideriamo ora il caso in cui si vuole che ogni arco di un cammino abbia sempre la stessa direzione. Anche in questo caso si hanno definizioni analoghe a quelle date per i grafi. Per comodità del lettore le ripetiamo. In un digrafo  $G = (V, E)$ , si chiama *cammino orientato di lunghezza  $t$*  e di estremi  $u_1$  e  $u_{t+1}$ , una sequenza

$$\langle u_1, a_1, u_2, a_2, \dots, u_t, a_t, u_{t+1} \rangle, \quad (3)$$

dove  $t \geq 0$ ,  $u_i$  è un vertice di  $V$  ed ogni  $a_i$  è l'arco  $(u_i, u_{i+1})$ , cioè  $a_i$  è l'arco che va da  $u_i$  ad  $u_{i+1}$ . Diremo anche che (3) è un cammino orientato che va da  $u_1$  ad  $u_{t+1}$  o che il vertice  $u_{t+1}$  è raggiungibile da  $u_1$  tramite il cammino orientato (3).

Per  $t = 0$ , (3) diventa  $\langle u_1 \rangle$ , che è il cammino orientato di lunghezza zero che va da  $u_1$  ad  $u_1$ . Elencare gli archi di un cammino orientato è superfluo, così (3) può essere, più semplicemente, scritto come  $\langle u_1, u_2, \dots, u_{t+1} \rangle$ .

Un *cammino orientato* si dice *chiuso* se il vertice iniziale coincide col vertice finale.

Un *cammino semplice orientato* è un *cammino orientato* con gli spigoli tutti distinti. Se inoltre, il primo e l'ultimo vertice coincidono si dice *cammino semplice orientato chiuso*.

Un cammino orientato si dice *elementare* se non contiene vertici ripetuti con l'eventuale eccezione del primo e l'ultimo. Dicesi *path orientato* un cammino elementare ed orientato avente tutti i vertici (estremi compresi) distinti.

Un cammino orientato è detto *ciclo orientato* se è elementare e chiuso.

**Definizione 1.26** *Un digrafo si dice fortemente connesso se per ogni paio di vertici  $u$  e  $v$  esiste un cammino orientato che va da  $u$  a  $v$  e un cammino orientato che va da  $v$  ad  $u$ , cioè se  $v$  è raggiungibile da  $u$  ed  $u$  è raggiungibile da  $v$ .*

**Definizione 1.27** *In un digrafo fortemente connesso  $G$  dicesi distanza dal vertice  $x$  al vertice  $y$ , e si denota con  $d(x, y)$ , la lunghezza minima dei cammini orientati che vanno da  $x$  a  $y$ .*

In un digrafo fortemente connesso possiamo avere  $d(x, y) \neq d(y, x)$ .

**Definizione 1.28** *Sia  $G = (V, E)$  un digrafo. Dicesi componente fortemente connessa di  $G$  ogni sottodigrafo di  $G$  che è fortemente connesso e che non è contenuto in un altro sottodigrafo fortemente connesso.*

In altre parole sono componenti fortemente connesse di  $G$  i sottodigrafi massimali fortemente connessi. Ovviamente,  $G$  è fortemente connesso se e solo se la sua (unica) componente connessa è lo stesso  $G$ .

Un vertice  $u$  di un digrafo  $G$  è detto una *radice* di  $G$  se ogni altro vertice  $v$  di  $G$  è raggiungibile da  $u$ . Allora un digrafo è fortemente connesso se e solo se ogni suo vertice è una radice.

## 2 Rappresentazioni di un grafo e di un digrafo

Ci sono diversi modi per rappresentare un grafo. Tra i più importanti ricordiamo quelle matriciali e quella mediante liste di adiacenza.

**Definizione 2.1** Dato un grafo (o un digrafo)  $G = (V, E)$  con  $|V| = n$ , la sua matrice di adiacenza è la matrice quadrata di ordine  $n$ ,  $A_G = (a_{ij})$ , così definita:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{i, j\} \in E \text{ } ((i, j) \in E, \text{ rispettivamente}), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Esempio 2.1** Scrivere le matrici di adiacenza del grafo  $G$  e del digrafo  $D$  rappresentati in Figura 9.

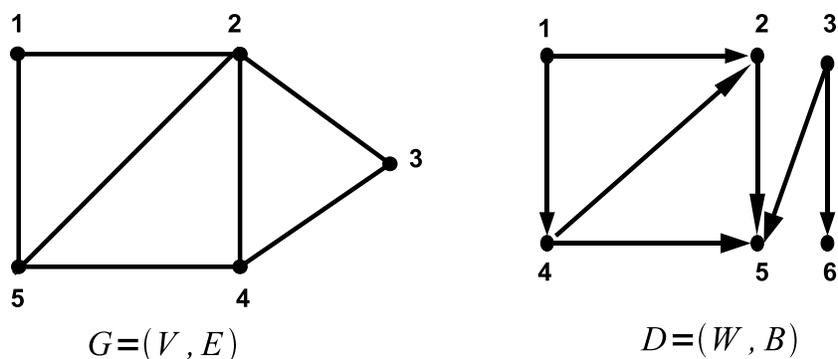


Figura 9

Si ha

$$A_G = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}, \quad A_D = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Si osservi che la matrice di adiacenza di un grafo è simmetrica mentre non è detto che lo sia quella di un digrafo. Lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione non dipende dal numero degli spigoli del grafo ma dal numero  $n$  dei vertici ed è uguale a  $n^2$ .

Un'interessante applicazione delle matrici di adiacenza di un grafo o di un digrafo è dato dal seguente teorema.

**Teorema 2.1** Sia  $G$  un grafo o un digrafo e sia  $A_G = (a_{ij})$  la sua matrice di adiacenza avente sia le righe che le colonne ordinate secondo i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Il numero di cammini distinti (o cammini orientati distinti se  $G$  è un digrafo) di lunghezza  $r > 0$  da  $v_i$  a  $v_j$  è dato da  $b_{ij}$ , essendo  $(A_G)^r = (b_{ij})$ .

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Proveremo il teorema per induzione. Il numero di cammini (o cammini orientati) da  $v_i$  a  $v_j$  di lunghezza 1 è dato da  $a_{ij}$ . Infatti esso è 1 se  $\{v_i, v_j\} \in E$  (o se  $(v_i, v_j) \in E$  nel caso in cui  $G$  è un digrafo) oppure 0 se  $\{v_i, v_j\} \notin E$  (o se  $(v_i, v_j) \notin E$ , rispettivamente).

Supponiamo adesso che il numero di cammini distinti (o cammini orientati distinti) di lunghezza  $r$  da  $v_i$  a  $v_j$  sia  $b_{ij}$ . Poichè  $(A_G)^{r+1} = (A_G)^r A_G$ , posto  $(A_G)^{r+1} = (c_{ij})$ , abbiamo

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj},$$

dove, per l'ipotesi induttiva,  $b_{ik}$  è il numero di cammini (cammini orientati, risp.) distinti di lunghezza  $r$  da  $v_i$  a  $v_k$ .

Un cammino (o cammino orientato) di lunghezza  $r+1$  da  $v_i$  a  $v_j$  è costituito da un cammino (o cammino orientato) di lunghezza  $r$  che va da  $v_i$  a qualche vertice intermedio  $v_k$ , e dallo spigolo  $\{v_k, v_j\}$  (o dall'arco  $(v_k, v_j)$ ). Quindi, per la regola del prodotto, il numero di tutti i cammini (o cammini orientati) di lunghezza  $r+1$  il cui penultimo vertice è  $v_k$ , è dato da  $b_{ik}a_{kj}$ . Al variare di  $v_k$  in  $V$ , si ottiene, per la regola della somma, che il numero di tutti i cammini che vanno da  $v_i$  a  $v_j$  è  $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = c_{ij}$ . ■

**Esempio 2.2** Determinare il numero di cammini di lunghezza 4 fra i vertici  $a$  e  $d$  del grafo  $G$  rappresentato in Figura 10.

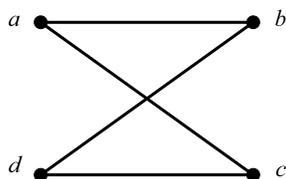


Figura 10

Poichè si ha

$$A = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad e \quad A^4 = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 8 & 0 & 0 & 8 \\ b & 0 & 8 & 8 & 0 \\ c & 0 & 8 & 8 & 0 \\ d & 8 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

si hanno 8 cammini di lunghezza 4 dal vertice  $a$  al vertice  $d$ . Essi sono:

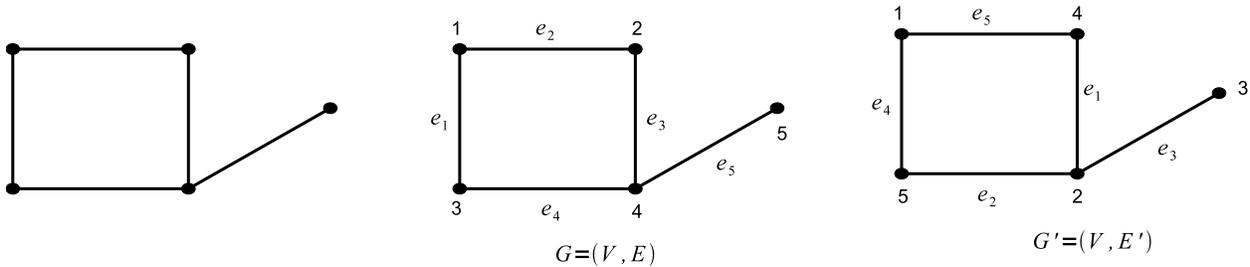
1.  $\langle a, b, a, b, d \rangle$ ;
2.  $\langle a, b, a, c, d \rangle$ ;
3.  $\langle a, b, d, b, d \rangle$ ;
4.  $\langle a, b, d, c, d \rangle$ ;
5.  $\langle a, c, a, b, d \rangle$ ;
6.  $\langle a, c, a, c, d \rangle$ ;
7.  $\langle a, c, d, b, d \rangle$ ;
8.  $\langle a, c, d, c, d \rangle$ .

**Definizione 2.2** La matrice d'incidenza di un grafo  $G = (V, E)$ , con  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  ed  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , è la matrice di tipo  $n \times m$ ,  $B_G = (b_{ij})$ , così definita:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e' un vertice dello spigolo } e_j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente la matrice di incidenza  $B_G$  di un grafo dipende da come sono etichettati i suoi vertici e spigoli. Così  $B_G$  è determinata a meno di permutazioni delle sue righe e colonne.

**Esempio 2.3** Due diverse rappresentazioni di uno stesso grafo sono mostrate in Figura 11. Scrivere le matrici d'incidenza di entrambe queste rappresentazioni e verificare che esse si ottengono una dall'altra mediante opportune permutazioni delle righe e delle colonne.



**Figura 11**

Si ha

$$B_G = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad \text{e} \quad B_{G'} = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Lasciamo al lettore il facile compito di permutare opportunamente le righe e le colonne di  $B_{G'}$  in modo da ottenere  $B_G$ .

Lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione è  $n \cdot m$ . Essendo  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$  (l'uguaglianza vale se il grafo è completo) risulta  $n \cdot m \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$ .

**Definizione 2.3** La matrice d'incidenza di un digrafo  $G = (V, E)$ , con  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  ed  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , è la matrice di tipo  $n \times m$   $B_G = (b_{ij})$  così definita:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i \text{ e' il vertice da cui l'arco } e_j \text{ esce,} \\ 1 & \text{se } i \text{ e' il vertice in cui l'arco } e_j \text{ entra,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente la matrice di incidenza  $B_G$  di un digrafo dipende da come sono etichettati i suoi vertici ed archi. Così  $B_G$  è determinata a meno di permutazioni delle sue righe e colonne.

**Esempio 2.4** Due diverse rappresentazioni di uno stesso digrafo sono mostrate in Figura 12. Scrivere le matrici d'incidenza di entrambe queste rappresentazioni e verificare che esse si ottengono una dall'altra mediante opportune permutazioni delle righe e delle colonne.

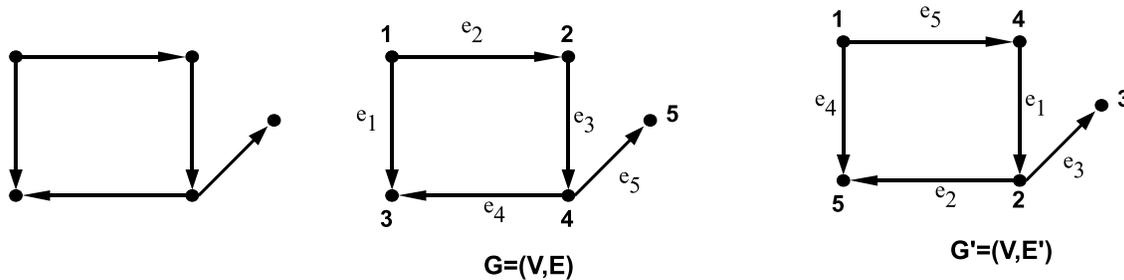


Figura 12

Si ha

$$B_G = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad \text{e} \quad B_{G'} = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Lasciamo al lettore la soddisfazione di scoprire come permutare le righe e le colonne di  $B_{G'}$  per ottenere  $B_G$ .

La matrice di incidenza  $B_G$  di un digrafo verifica le seguenti proprietà:

1. ogni colonna contiene esattamente un 1, un  $-1$  e gli altri elementi sono tutti 0;
2. se si sommano tutti i  $-1$  di una riga si ottiene il grado-out del vertice corrispondente a quella riga;
3. se si sommano tutti gli 1 di una riga si ottiene il grado-in del vertice corrispondente a quella riga;
4. sommando tutte le righe si ottiene una riga tutta nulla. Pertanto, se il digrafo ha  $n$  vertici, il rango di  $B_G$  è minore od uguale a  $n - 1$ .

**Definizione 2.4 Liste di adiacenza.** *La rappresentazione con liste d'adiacenza di un grafo (o di un digrafo)  $G = (V, E)$  consiste in un vettore  $A_{adj}$  di  $|V|$  liste, una per ogni vertice di  $V$ . Per ogni  $a \in V$  la lista di adiacenza  $A_{adj}[a]$  contiene tutti i vertici  $b$  tale che esiste lo spigolo  $\{a, b\}$  (o, rispettivamente, l'arco  $(a, b)$ ). Pertanto  $A_{adj}[a]$  contiene tutti i vertici adiacenti ad  $a$  in  $G$ .*

In ogni lista di adiacenza i vertici vengono di solito memorizzati in un ordine arbitrario.

**Esempio 2.5** Scrivere le liste di adiacenza del grafo  $G$  e del digrafo  $D$  dell'Esempio 2.1.

$a$	$A_{adj}[a]$	$a$	$A_{adj}[a]$
1	2, 5	1	2, 4
2	1, 5, 3, 4	2	5
3	2, 4	3	6, 5
4	2, 5, 3	4	2, 5
5	4, 1, 2	5	— — —
		6	— — —

La somma delle lunghezze di tutte le liste di adiacenza di un grafo è  $2|E| = 2m$ , perchè se  $\{a, b\}$  è uno spigolo allora  $b$  appare nella lista di  $a$  e viceversa. Lo spazio di memoria occupato da tale tipo di rappresentazione è  $|V| + 2|E| = n + 2m$ .

In relazione allo spazio di memoria da impegnare, una rappresentazione può essere più conveniente rispetto ad un'altra. Chiaramente un *grafo sparso* (cioè se  $m \ll n^2$ ) conviene rappresentarlo con la lista di adiacenza, mentre un *grafo denso* (cioè  $|E| \sim |V|^2$ ) con la matrice di adiacenza.

**Definizione 2.5 Liste di incidenza.** *La rappresentazione con liste d'incidenza di un grafo (o di un digrafo)  $G = (V, E)$  consiste in un vettore  $A_{inc}$  di  $|V|$  liste, una per ogni vertice di  $V$ . Per ogni  $a \in V$  la lista di incidenza  $A_{inc}[a]$  di un grafo (di un digrafo) contiene tutti gli spigoli  $\{a, b\}$  incidenti in  $a$  (tutti gli archi  $(a, b)$  che lasciano  $a$ ).*

In ogni lista di incidenza i vertici vengono di solito memorizzati in un ordine arbitrario.

**Esempio 2.6** Scrivere le liste di incidenza del grafo  $G$  e del digrafo  $D$  dell'Esempio 2.1.

$a$	$A_{inc}[a]$
1	$\{1, 2\}, \{1, 5\}$
2	$\{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}$
3	$\{3, 2\}, \{3, 4\}$
4	$\{4, 2\}, \{4, 5\}$
5	$\{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}$

$a$	$A_{inc}[a]$
1	$(1, 2), (1, 4)$
2	$(2, 5)$
3	$(3, 5), (3, 6)$
4	$(4, 2), (4, 5)$
5	— — —
6	— — —

Si osservi che per un digrafo le liste di incidenza coincidono con un modo diverso di elencare tutti i suoi archi. Mentre, per un grafo, esse addirittura ripetono due volte ogni spigolo. Ma, a volte, lavorare con le liste di incidenza è più facile che usare la semplice elencazione degli archi o degli spigoli.

### 3 Isomorfismo fra grafi e fra digrafi

**Definizione 3.1** Due digrafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  si dicono isomorfi se esiste un' applicazione biunivoca  $f : V \rightarrow V'$  tale che:

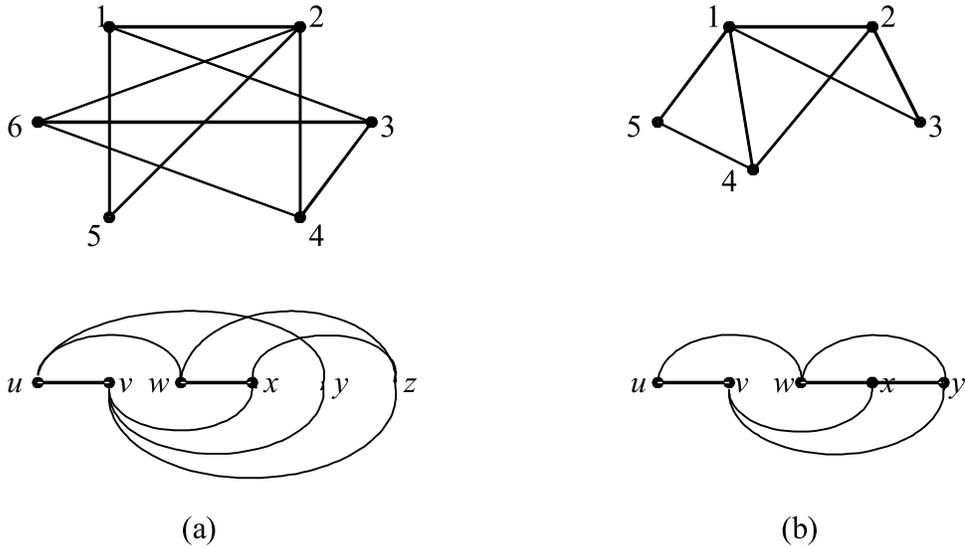
$$(a, b) \in E \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E'.$$

L'applicazione  $f$  dicesi isomorfismo fra i digrafi  $G$  e  $G'$ .

**Definizione 3.2** Due grafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  si dicono isomorfi se esiste un' applicazione biunivoca  $f : V \rightarrow V'$  tale che:

$$\{a, b\} \in E \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E'.$$

L'applicazione  $f$  dicesi isomorfismo fra i grafi  $G$  e  $G'$ .



(a) Coppia di grafi isomorfi, (b) coppia di grafi non isomorfi.

**Figura 13**

Dati due grafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$ , con  $|V| = |V'| = n$  e  $|E| = |E'|$ , spesso è difficile determinare se sono isomorfi o no. Infatti vi sono  $n!$  applicazioni biunivoche  $f : V \rightarrow V'$ . Provare se  $f$  conserva o no l'adiacenza è quindi una procedura troppo lunga non appena  $n$  diventa grande.

Una proprietà del grafo  $G$  è detta *invariante* per isomorfismi se essa è goduta da tutti i grafi  $G'$  isomorfi a  $G$ . Un metodo per provare che due grafi  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  non sono isomorfi consiste nel trovare una proprietà  $p$  di  $G$  invariante per isomorfismi che non vale in  $G'$ . Per esempio, per ogni intero  $d \geq 0$ , se  $G$  contiene un certo numero di vertici di grado  $d$  anche  $G'$  deve avere lo stesso numero di vertici di grado  $d$ .

Per esempio, i grafi (b) di Figura 13 non sono isomorfi. Infatti essi, pur avendo lo stesso numero di vertici e spigoli, differiscono per il numero di elementi aventi uno stesso grado: il grafo più in basso contiene quattro vertici di grado 3 ed uno di grado 2, mentre quello più in alto contiene due vertici di grado 2, due di grado 3 ed uno di grado 4.

In Figura 14 mostriamo due grafi  $G$  e  $G'$  che, pur avendo tutti i vertici di grado 2, non sono isomorfi.

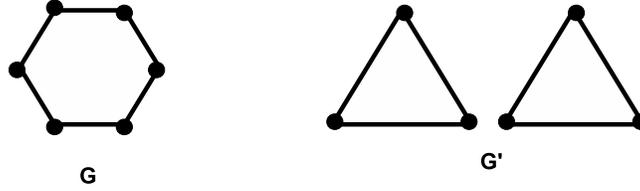


Figura 14

**Esempio 3.1** Verificare se i grafi  $G$  ed  $H$  di Figura 15 sono isomorfi o no.

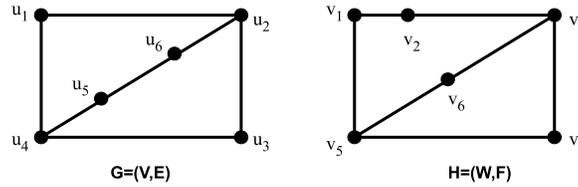


Figura 15

Entrambi  $G$  e  $H$  hanno sei vertici e sette spigoli ed entrambi hanno quattro vertici di grado due e due vertici di grado tre. Si può inoltre verificare facilmente che i sottografi di  $G$  ed  $H$  formati dai vertici di grado 2 e dagli spigoli che li connettono sono isomorfi. Quindi non è sbagliato pensare che  $G$  ed  $H$  possano essere isomorfi.

Definiamo ora un'opportuna applicazione biunivoca  $f : V \rightarrow W$  e poi verifichiamo se essa è un isomorfismo. Poichè  $d(u_1) = 2$  ed  $u_1$  è solamente adiacente ai due vertici di grado 3,  $f(u_1)$  può essere  $v_4$  oppure  $v_6$ . Poniamo arbitrariamente  $f(u_1) = v_6$ . [Se dovessimo trovare che questa scelta porta ad applicazioni biunivoche  $f$  che non sono isomorfismi, porremo  $f(u_1) = v_4$ .] Poichè  $u_2$  è adiacente ad  $u_1$ , le possibili immagini di  $u_2$  sono  $v_3$  e  $v_5$ . Sempre arbitrariamente poniamo  $f(u_2) = v_3$ . Continuando in questo modo, usando i gradi e l'adiacenza dei vertici come guida, possiamo porre  $f(u_3) = v_4$ ,  $f(u_4) = v_5$ ,  $f(u_5) = v_1$  e  $f(u_6) = v_2$ . Per vedere se l'applicazione  $f$  così definita è un isomorfismo esaminiamo le matrici di adiacenza di  $G$  e di  $H$ :

$$A_G = \begin{array}{c|cccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ u_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} , \quad A_H = \begin{array}{c|cccccc} & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \\ \hline v_6 = f(u_1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 = f(u_2) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 = f(u_3) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 = f(u_4) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_1 = f(u_5) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 = f(u_6) & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Essendo  $A_G = A_H$ ,  $f$  è un isomorfismo. È bene notare che se avessimo ottenuto  $A_G \neq A_H$  non avremmo potuto dire che  $G$  e  $H$  non sono isomorfi perchè un'altra corrispondenza biunivoca diversa da  $f$  potrebbe essere un isomorfismo.

Un altro utile invariante per isomorfismi consiste nell'esistenza di un ciclo di data lunghezza  $k \geq 2$ .

**Esempio 3.2** Verificare se i grafi  $G$  ed  $H$  di Figura 16 sono isomorfi.

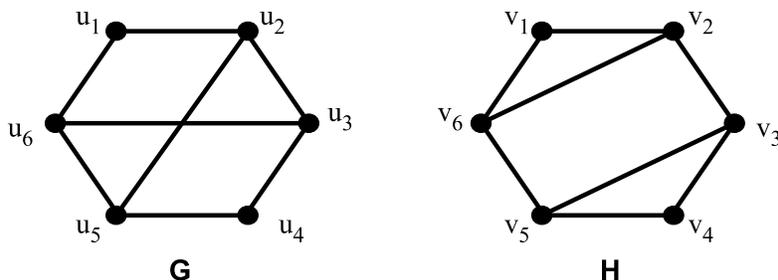


Figura 16

Entrambi hanno sei vertici e otto spigoli ed entrambi hanno quattro vertici di grado 3 e due vertici di grado 2. Così i tre invarianti (numero di vertici, numero di spigoli e gradi dei vertici) coincidono per entrambi. D'altra parte,  $H$  ha il ciclo di lunghezza tre  $\langle v_1, v_2, v_6, v_1 \rangle$  mentre, come si vede facilmente  $G$  non contiene cicli di lunghezza 3. Pertanto i due grafi non sono isomorfi.

**Esempio 3.3** Verificare se i grafi  $G$  ed  $H$  di Figura 17 sono isomorfi.

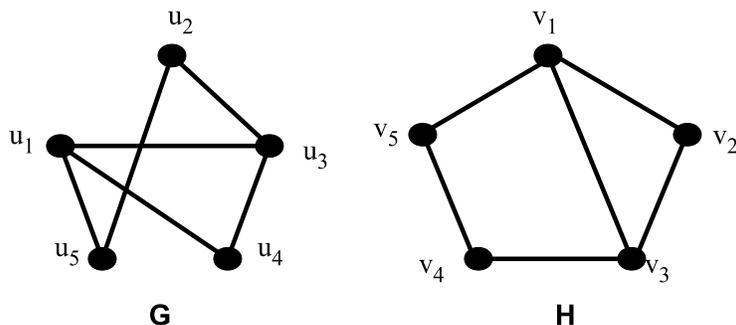


Figura 17

Entrambi hanno cinque vertici, sei spigoli, due vertici di grado 3 e tre vertici di grado 2. Inoltre entrambi hanno un ciclo di lunghezza 3, uno di lunghezza 4 e un altro di lunghezza

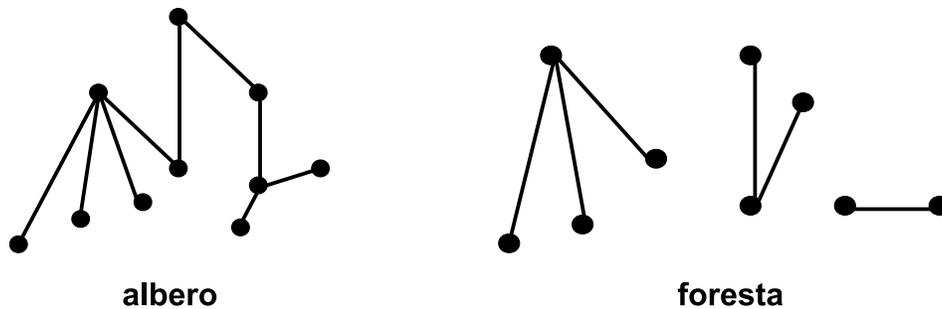
5. Per trovare un possibile isomorfismo, dobbiamo cercare cammini semplici che passano per tutti i vertici facendo in modo che i vertici corrispondenti nei due grafi abbiano lo stesso grado. Per esempio i cammini  $\langle u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 \rangle$  in  $G$  e  $\langle v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 \rangle$  in  $H$  attraversano tutti i vertici del grafo cui appartengono, iniziano in un vertice di grado 3, passano attraverso vertici di grado 2, 3, e 2, rispettivamente, e finiscono in un vertice di grado 2. Seguendo questi cammini è lecito controllare se è un isomorfismo l'applicazione  $f$  così definita:  $f(u_1) = v_3$ ,  $f(u_4) = v_2$ ,  $f(u_3) = v_1$ ,  $f(u_2) = v_5$ , e  $f(u_5) = v_4$ . In effetti, sia attraverso le matrici di adiacenza, sia mediante la definizione di isomorfismo, si può verificare che  $f$  è un isomorfismo.

## 4 Alberi

Una particolare classe di grafi sono gli alberi (il nome deriva, come vedremo più avanti, dalla somiglianza di questi grafi con gli alberi). Essi trovano applicazione in moltissimi problemi appartenenti a svariate discipline. In molti problemi informatici i dati possono essere rappresentati mediante alberi, e questo fatto garantisce una risoluzione efficiente del problema che altrimenti sarebbe impossibile.

**Definizione 4.1** *Dicesi albero un grafo connesso aciclico. Dicesi foresta un grafo aciclico.*

Gli alberi pertanto risultano essere le componenti connesse di una foresta. Esempi:



Gli alberi possono essere caratterizzati in molti modi, si hanno infatti i seguenti teoremi.

**Teorema 4.1** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a)  $G$  è un albero.
- (b)  $G$  è aciclico, ma se si aggiunge un qualsiasi spigolo si forma un ciclo.
- (c) Comunque presi  $u, v \in V$ , esiste un unico path di estremi  $u$  e  $v$ .
- (d)  $G$  è connesso, ma eliminando uno spigolo qualsiasi di  $G$  si perde la connessione.

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** (a)  $\rightarrow$  (b). Per ipotesi,  $G$  è aciclico e connesso. Siano  $u$  e  $v$  due vertici distinti di  $V$  tali che  $\{u, v\} \notin E$ . Per la connessione di  $G$ , esiste un path  $c$  di estremi  $u$  e  $v$ . Se a  $c$  si aggiunge il nuovo spigolo  $\{u, v\}$  si ottiene un ciclo.

(b)  $\rightarrow$  (c). Essendo  $G$  aciclico, ogni coppia di vertici può essere connessa da al più un cammino. Se vi fosse una coppia  $\{u, v\}$  non connessa da alcun cammino allora lo spigolo  $\{u, v\}$  potrebbe essere aggiunto senza perdere l'aciclicità. Quindi esiste uno ed un solo cammino  $c$  di estremi  $u$  e  $v$ . Per il Teorema 1.2,  $c$  è un path.

(c)  $\rightarrow$  (d). Per ipotesi,  $G$  è connesso. Sia  $\{u, v\} \in E$  e sia  $G'$  il grafo ottenuto rimuovendo da  $G$  lo spigolo  $\{u, v\}$ . Se  $G'$  fosse connesso, esisterebbe in esso un path  $c$  di estremi  $u$  e  $v$ . Ma, in  $G$ , il path  $c$  e lo spigolo  $\{u, v\}$  formerebbero due diversi path di estremi  $u$  e  $v$ . Ciò contraddice l'ipotesi.

(d)  $\rightarrow$  (a).  $G$  è connesso per ipotesi. Quindi basta provare l'aciclicità di  $G$ . Se, per assurdo,  $G$  contenesse un ciclo  $c$ , allora un qualsiasi spigolo di  $c$  potrebbe essere eliminato senza perdere la proprietà di connessione. Ciò contraddice l'ipotesi. ■

**Teorema 4.2** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo e sia  $|V| = n$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (e)  $G$  è un albero.
- (f)  $G$  è aciclico e  $|E| = n - 1$ .
- (g)  $G$  è connesso e  $|E| = n - 1$ .

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** (e)  $\rightarrow$  (f). Se  $G$  è un albero, allora  $G$  è aciclico. Dimostriamo che  $|E| = n - 1$  mediante il secondo principio di induzione. Più precisamente, si consideri la proposizione  $P(m) =$  "Se  $G$  è un albero con  $m$  vertici, allora  $G$  ha  $m - 1$  spigoli".

$P(1)$  è vera. Infatti, se  $G$  ha solo un vertice, l'insieme dei suoi spigoli, essendo vuoto, ha cardinalità  $0 = m - 1$ .

Sia  $n > 1$  e supponiamo che  $P(m)$  è vera per ogni  $1 \leq m < n$ . Vogliamo provare che  $P(n)$  è vera. Sia  $G = (V, E)$  un albero con  $n$  vertici. Eliminiamo da  $G$  uno spigolo. Per la proposizione (d) del Teorema 4.1, si perde la connessione in  $G$  ottenendo, come

risultato di questa operazione, un grafo formato da due componenti connesse  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  (perchè le componenti connesse sono proprio due?). Ovviamente  $G_1$  e  $G_2$  sono due alberi. Posto  $|V_1| = d_1 > 0$  e  $|V_2| = d_2 > 0$ , ed essendo  $d_1 + d_2 = n$ , si ha  $1 \leq d_1 < n$  e  $1 \leq d_2 < n$ . Per l'ipotesi induttiva,  $|E_1| = d_1 - 1$  e  $|E_2| = d_2 - 1$ . Poichè  $E$  si ottiene unendo ad  $E_1 \cup E_2$  lo spigolo precedentemente eliminato da  $G$ , si ha  $|E| = (d_1 - 1) + (d_2 - 1) + 1 = d_1 + d_2 - 1 = n - 1$ .

(f)  $\rightarrow$  (g). Supponiamo che  $G$  sia aciclico e che  $|E| = n - 1$ . Se  $G$  non fosse connesso, potremmo aggiungere spigoli a  $G$  sino ad ottenere la connessione senza perdere l'aciclicità. Si otterrebbe un grafo  $G' = (V, E')$  con  $|E'| > n - 1$ , connesso e aciclico (cioè un albero). Ma allora (avendo già provato che (e)  $\rightarrow$  (f)) avremmo  $|E'| = n - 1$ , che è in contraddizione con la disuguaglianza  $|E'| > n - 1$ .

(g)  $\rightarrow$  (e). Supponiamo adesso che  $G$  sia connesso e che  $|E| = n - 1$ . Supponiamo che  $G$  contenga un ciclo  $c$ . Rimuovendo da  $c$  un suo spigolo otterremmo un nuovo grafo  $G_1 = (V, E_1)$  ancora connesso. Ripetendo questo procedimento per un altro eventuale ciclo contenuto in  $G_1$ , otterremo un grafo  $G_2 = (V, E_2)$  ancora connesso. Così procedendo si otterrebbe, alla fine, un grafo  $G' = (V, E')$  connesso ed aciclico. Cioè  $G'$  sarebbe un albero con  $|V| = n$  vertici e  $|E'| < |E| = n - 1$  spigoli. Questo è in contraddizione col fatto che, essendo  $G'$  un albero con  $n$  vertici dovrebbe avere  $n - 1$  spigoli (infatti abbiamo già provato che (e)  $\rightarrow$  (f)). ■

**Teorema 4.3** *Ogni albero con almeno due vertici ha almeno due vertici pendenti.*

**Dimostrazione.** (**Dimostrazione obbligatoria**). Siano  $n$  il numero dei vertici di un albero e  $k$  il numero di quelli pendenti. Per il Teorema 4.2, l'albero ha  $n - 1$  spigoli, e quindi, per il Teorema 1.1,

$$2(n - 1) = \sum_{x \in V} d(x) \geq k + 2(n - k)$$

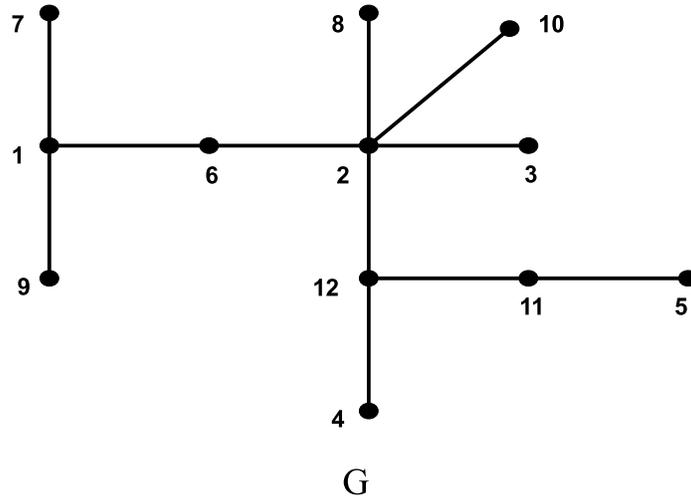
cosicchè  $k \geq 2$ . ■

Vale il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 4.4** *Il numero di alberi aventi  $n$  vertici è  $n^{n-2}$ . Il numero di foreste aventi  $n$  vertici ed esattamente  $s$  componenti connesse è  $sn^{n-s-1}$ .*

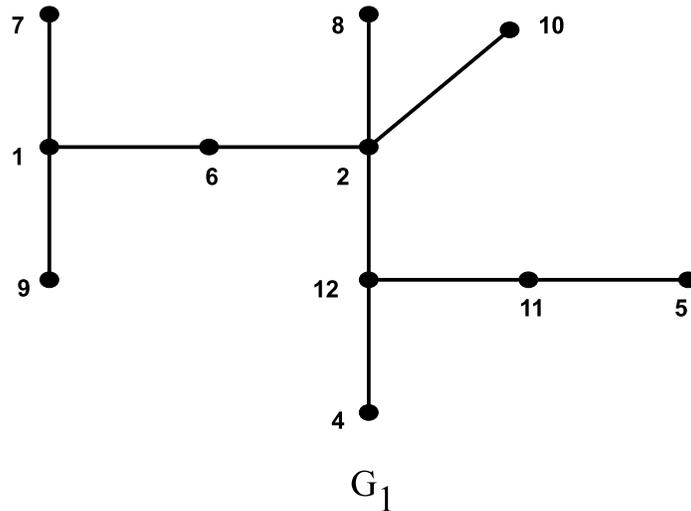
Si osservi che il numero di alberi aventi  $n \geq 2$  vertici coincide col numero di parole di lunghezza  $n - 2$  che si possono formare con un alfabeto di  $n$  caratteri. Esistono quindi  $n^{n-2}!$  applicazioni biunivoche fra l'insieme degli alberi con  $n$  vertici e quello delle parole di lunghezza  $n - 2$  che si possono formare con un alfabeto di  $n$  caratteri. Un'interessante corrispondenza biunivoca è dovuta a Prüfer. Se  $n = 2$ , si ha un solo albero (lo spigolo congiungente i due vertici). A questo albero facciamo corrispondere la parola vuota  $w = ()$ . Per  $n \geq 3$  illustriamo con un esempio questa applicazione biunivoca.

**Esempio 4.1 Codice di Prüfer.** Illustriamo come si costruisce, secondo il Codice di Prüfer, la parola corrispondente all'albero  $G$  mostrato nella seguente figura

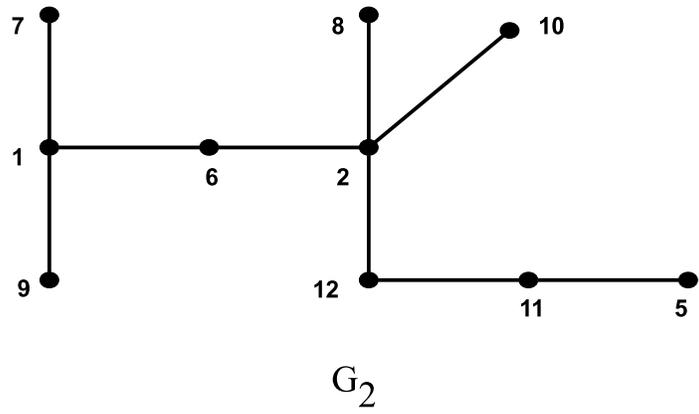


Prendiamo come alfabeto l'insieme  $V = \{1, 2, \dots, 12\}$  dei vertici del grafo e procediamo nel seguente modo:

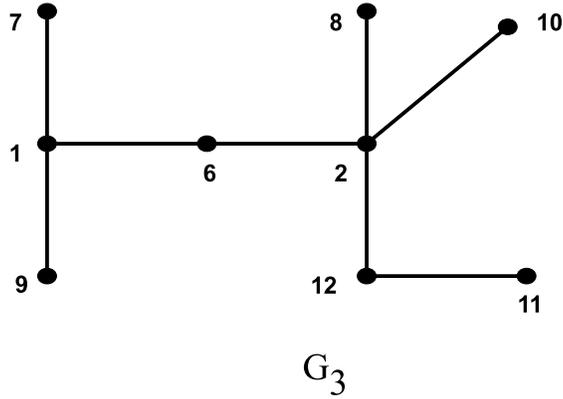
Passo  $A_1$ . Pensando i vertici ordinati da 1 a 12 si determini la foglia (vertice di grado 1) corrispondente al vertice minore. Essa è 3. Allora formiamo la parola  $w_1 = (2)$  e rimuoviamo da  $G$  lo spigolo  $\{3, 2\}$  ottenendo l'albero



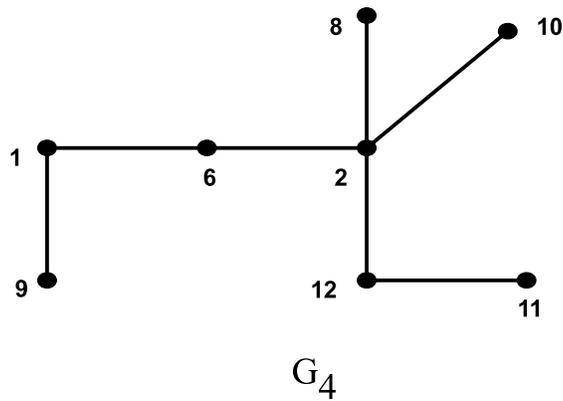
Passo  $A_2$ . La foglia più piccola di  $G_1$  è 4. Allora formiamo la parola  $w_2 = (2\ 12)$  e rimuoviamo da  $G_1$  lo spigolo  $\{4, 12\}$  ottenendo l'albero



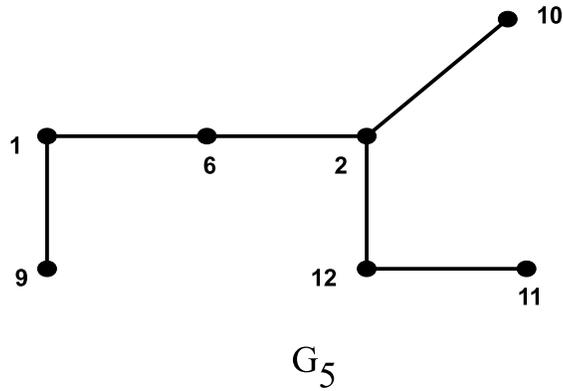
Passo  $A_3$ . La foglia più piccola di  $G_2$  è 5. Allora formiamo la parola  $w_3 = (2\ 12\ 11)$  e rimuoviamo da  $G_2$  lo spigolo  $\{5, 11\}$  ottenendo l'albero



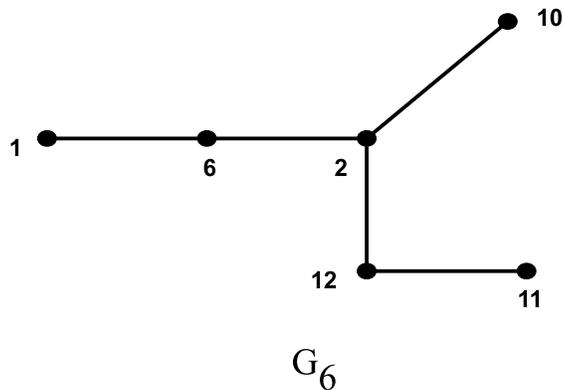
Passo  $A_4$ . La foglia più piccola di  $G_3$  è 7. Allora formiamo la parola  $w_4 = (2\ 12\ 11\ 1)$  e rimuoviamo da  $G_3$  lo spigolo  $\{7, 1\}$  ottenendo l'albero



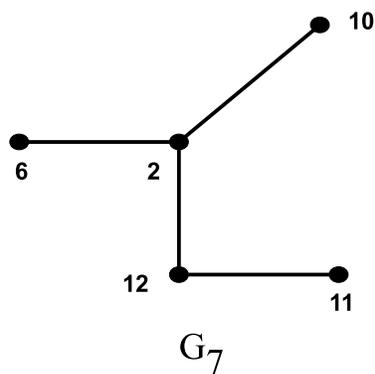
Passo  $A_5$ . La foglia più piccola di  $G_4$  è 8. Allora formiamo la parola  $w_5 = (2\ 12\ 11\ 1\ 2)$  e rimuoviamo da  $G_4$  lo spigolo  $\{8, 2\}$  ottenendo l'albero



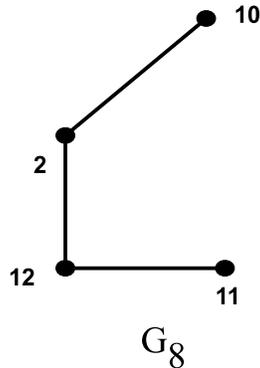
Passo  $A_6$ . La foglia più piccola di  $G_5$  è 9. Allora formiamo la parola  $w_6 = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1)$  e rimuoviamo da  $G_5$  lo spigolo  $\{9, 1\}$  ottenendo l'albero



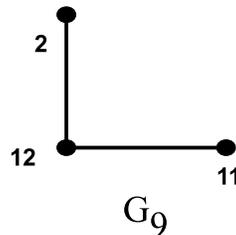
Passo  $A_7$ . La foglia più piccola di  $G_6$  è 1. Allora formiamo la parola  $w_7 = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6)$  e rimuoviamo da  $G_6$  lo spigolo  $\{1, 6\}$  ottenendo l'albero



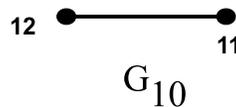
Passo  $A_8$ . La foglia più piccola di  $G_7$  è 6. Allora formiamo la parola  $w_8 = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2)$  e rimuoviamo da  $G_7$  lo spigolo  $\{6, 2\}$  ottenendo l'albero



Passo  $A_9$ . La foglia più piccola di  $G_8$  è 10. Allora formiamo la parola  $w_9 = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2)$  e rimuoviamo da  $G_8$  lo spigolo  $\{10, 2\}$  ottenendo l'albero



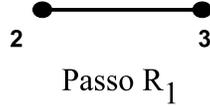
Passo  $A_{10}$ . La foglia più piccola di  $G_9$  è 2. Allora formiamo la parola  $w_{10} = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$  e rimuoviamo da  $G_9$  lo spigolo  $\{12, 2\}$  ottenendo l'albero



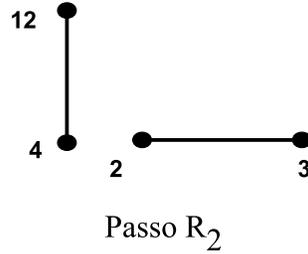
Quest'ultimo albero coincide con uno spigolo e la procedura si arresta. Pertanto all'albero  $G$  resta associata la parola  $w = w_{10} = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ .

Mostriamo ora come, a partire dalla parola  $w = (2\ 12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ , si ricostruisce l'albero  $G$ . Sia  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  l'insieme dei vertici del grafo da ricostruire.

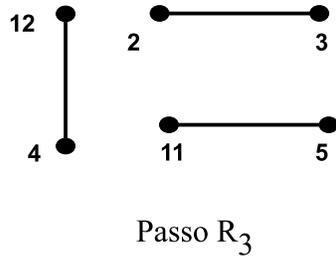
Passo  $R_1$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 2, da  $w$  ottenendo  $w_1 = (12\ 11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V$ , procedendo nell'ordine crescente, che è diverso dalla lettera rimossa 2 e che non appare in  $w_1$ . Si ha:  $1 \in w_1, 3 \notin w_1$ . Allora,  $\{2, 3\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_1 = V \setminus \{3\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .



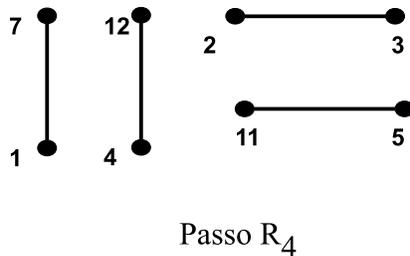
Passo  $R_2$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 12, da  $w_1$  ottenendo  $w_2 = (11\ 1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_1$ , che è diverso dalla lettera rimossa 12 e che non appare in  $w_2$ . Si ha:  $1 \in w_2$ ,  $2 \in w_2$ ,  $4 \notin w_2$ . Allora  $\{12, 4\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}, \{12, 4\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_2 = V_1 \setminus \{4\} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .



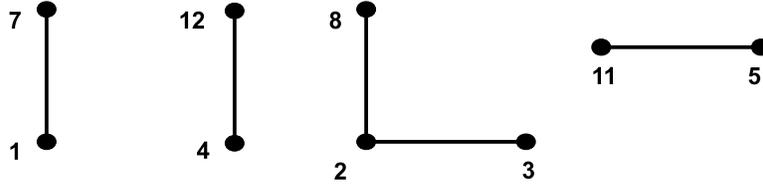
Passo  $R_3$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 11, da  $w_2$  ottenendo  $w_3 = (1\ 2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_2$ , che è diverso dalla lettera rimossa 11 e che non appare in  $w_3$ . Si ha:  $1 \in w_3$ ,  $2 \in w_3$ ,  $5 \notin w_3$ . Allora  $\{11, 5\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_3 = V_2 \setminus \{5\} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .



Passo  $R_4$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 1, da  $w_3$  ottenendo  $w_4 = (2\ 1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_3$ , che è diverso dalla lettera rimossa 1 e che non appare in  $w_4$ . Si ha:  $2 \in w_4$ ,  $6 \in w_4$ ,  $7 \notin w_4$ . Allora  $\{1, 7\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_4 = V_3 \setminus \{7\} = \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

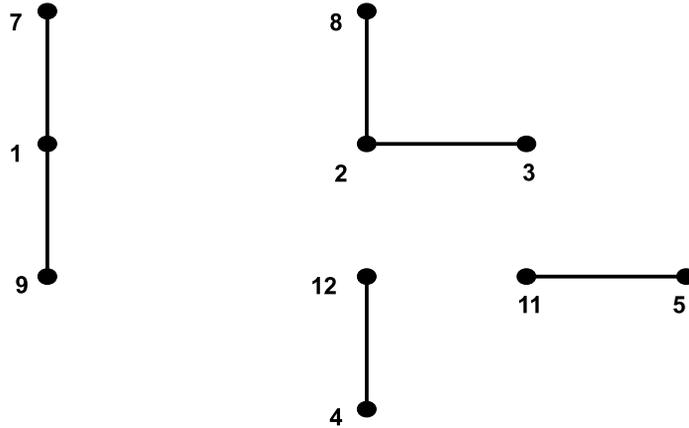


Passo  $R_5$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 2, da  $w_4$  ottenendo  $w_5 = (1\ 6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_4$ , che è diverso dalla lettera rimossa 2 e che non appare in  $w_5$ . Si ha:  $1 \in w_5$ ,  $6 \in w_5$ ,  $8 \notin w_5$ . Allora  $\{2, 8\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_5 = V_4 \setminus \{8\} = \{1, 2, 6, 9, 10, 11, 12\}$ .



Passo  $R_5$

Passo  $R_6$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 1, da  $w_5$  ottenendo  $w_6 = (6\ 2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_5$ , che è diverso dalla lettera rimossa 1 e che non appare in  $w_6$ . Si ha:  $2 \in w_6$ ,  $6 \in w_6$ ,  $9 \notin w_6$ . Allora  $\{1, 9\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè  $\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}\} \subseteq E$ . Si ponga  $V_6 = V_5 \setminus \{9\} = \{1, 2, 6, 10, 11, 12\}$ .

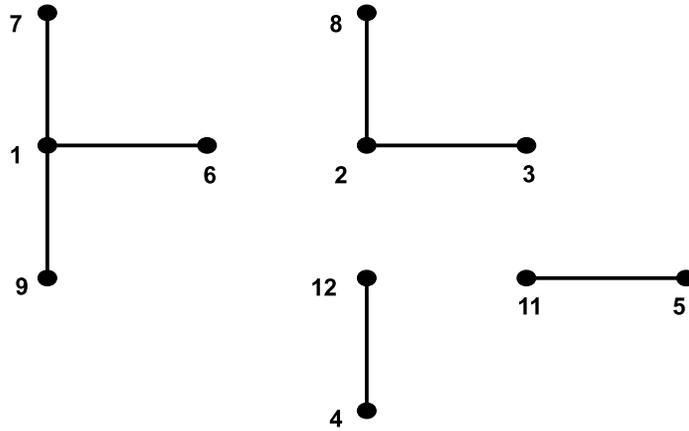


Passo  $R_6$

Passo  $R_7$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 6, da  $w_6$  ottenendo  $w_7 = (2\ 2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_6$ , che è diverso dalla lettera rimossa 6 e che non appare in  $w_7$ . Si ha:  $1 \notin w_7$ . Allora  $\{6, 1\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè

$$\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}, \{6, 1\}\} \subseteq E.$$

Si ponga  $V_7 = V_6 \setminus \{1\} = \{2, 6, 10, 11, 12\}$ .

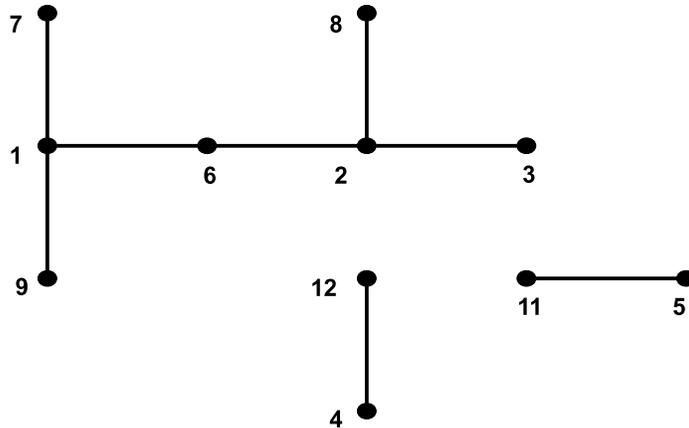


Passo  $R_7$

Passo  $R_8$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 2, da  $w_7$  ottenendo  $w_8 = (2\ 12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_7$ , che è diverso dalla lettera rimossa 2 e che non appare in  $w_8$ . Si ha:  $6 \notin w_8$ . Allora  $\{2, 6\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè

$$\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}, \{6, 1\}, \{2, 6\}\} \subseteq E.$$

Si ponga  $V_8 = V_7 \setminus \{6\} = \{2, 10, 11, 12\}$ .

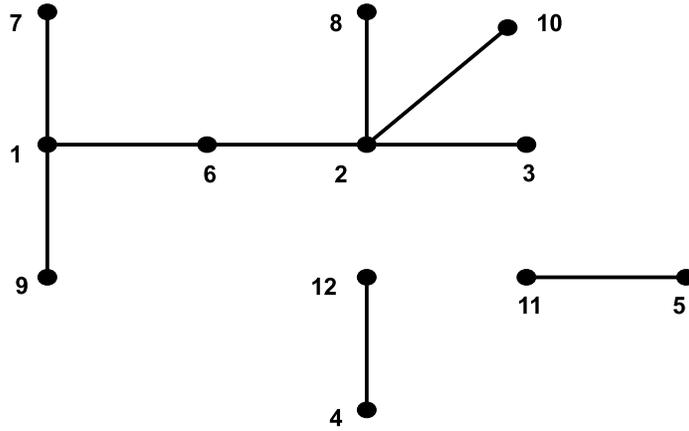


Passo  $R_8$

Passo  $R_9$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 2, da  $w_8$  ottenendo  $w_9 = (12)$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_8$ , che è diverso dalla lettera rimossa 2 e che non appare in  $w_9$ . Si ha:  $10 \notin w_9$ . Allora  $\{2, 10\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè

$$\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}, \{6, 1\}, \{2, 6\}, \{2, 10\}\} \subseteq E.$$

Si ponga  $V_9 = V_8 \setminus \{10\} = \{2, 11, 12\}$ .

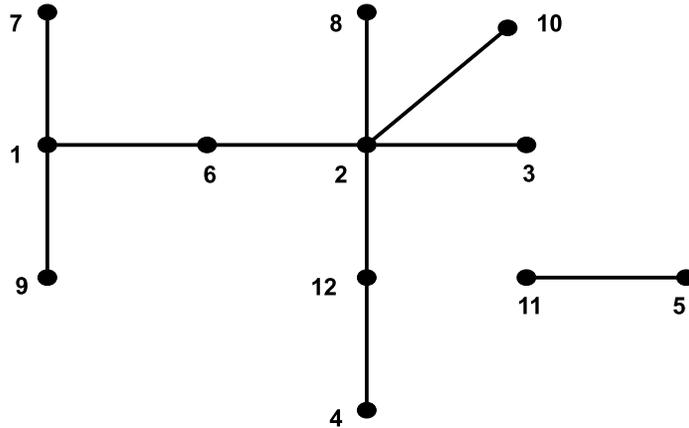


Passo  $R_9$

Passo  $R_{10}$ . Si rimuova la prima lettera, che per noi è 12, da  $w_9$  ottenendo  $w_{10} = ()$ . Si cerchi il primo elemento di  $V_9$ , che è diverso dalla lettera rimossa 12. Esso è 2. Allora  $\{12, 2\}$  è uno spigolo di  $G$ , cioè

$$\{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}, \{6, 1\}, \{2, 6\}, \{2, 10\}, \{12, 2\}\} \subseteq E.$$

Si ponga  $V_{10} = V_9 \setminus \{2\} = \{11, 12\}$ .

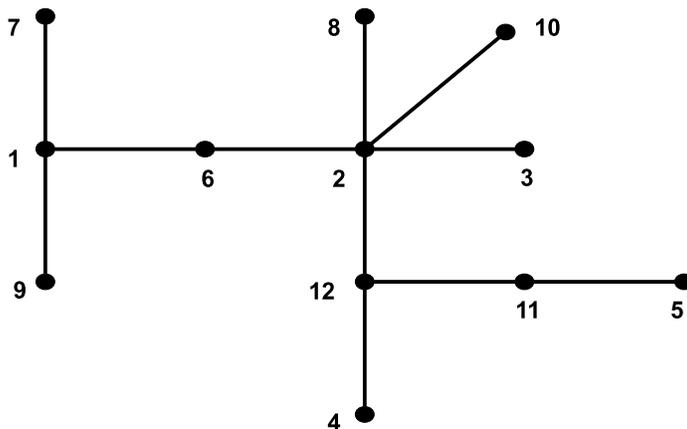


Passo  $R_{10}$

Passo  $R_{11}$ . Poichè  $|V_{10}| = 2$ , si ponga

$$E = \{\{2, 3\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}, \{6, 1\}, \{2, 6\}, \{2, 10\}, \{12, 2\}, \{11, 12\}\}$$

e l'albero cercato è  $G = (V, E)$ .



Passo  $R_{11}$

**Definizione 4.2** Un digrafo  $G$  è detto un albero orientato se l'underlying multigrafo  $|G|$  è un albero. Un digrafo  $G$  è detto una foresta orientata se  $|G|$  è una foresta.

**Teorema 4.5** Un digrafo  $G = (V, E)$  è una foresta orientata se e solo se le colonne della sua matrice di incidenza  $B_G$  sono linearmente indipendenti.

**Dimostrazione.** (Dimostrazione facoltativa). Sia  $|V| = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e  $|E| = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Supponiamo che le righe e le colonne di  $B_G$  corrispondano, rispettivamente e nell'ordine, ai vertici  $u_1, u_2, \dots, u_n$  e agli archi  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Poniamo infine

$$B_G = (C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_m), \text{ essendo } C_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \text{ per } i = 1, 2, \dots, m.$$

Cominciamo col dimostrare la sufficienza: se le colonne di  $B_G$  sono linearmente indipendenti, allora  $G$  è una foresta. Siano  $C_1, C_2, \dots, C_m$  linearmente indipendenti e supponiamo che, per assurdo,  $G$  contenga il ciclo

$$\langle u_{s_1}, a_{s_1}, u_{s_2}, a_{s_2}, \dots, u_{s_k}, a_{s_k}, u_{s_{k+1}} = u_{s_1} \rangle.$$

Per  $i = 1, 2, \dots, k$ , sia

$$x_{s_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{s_i} = (u_{s_i}, u_{s_{i+1}}), \\ -1 & \text{se } a_{s_i} = (u_{s_{i+1}}, u_{s_i}) \end{cases}.$$

Allora

$$x_{s_1}C_{s_1} + x_{s_2}C_{s_2} + \dots + x_{s_k}C_{s_k} = \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

e le colonne  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sono linearmente dipendenti contrariamente al supposto che esse fossero linearmente indipendenti. Quindi  $G$  è aciclico.

Necessità: se  $G$  è una foresta, allora le colonne di  $B_G$  sono linearmente indipendenti. Infatti, supponiamo per assurdo che le colonne  $C_1, C_2, \dots, C_m$  siano linearmente dipendenti. Per definizione di lineare dipendenza, esiste una  $m$ -upla ordinata  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  di scalari non tutti nulli tali che

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_mC_m = \mathbf{o}. \quad (4)$$

Indicati con  $x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_k}$  gli scalari non nulli, la (4) diventa

$$x_{s_1}C_{s_1} + x_{s_2}C_{s_2} + \dots + x_{s_k}C_{s_k} = \mathbf{o}. \quad (5)$$

Sia  $E' = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_k}\}$  e sia  $V'$  l'insieme dei vertici di  $G$  incidenti con gli spigoli di  $E'$ . Posto  $G' = (V', E')$ , dalla (5) segue che ogni vertice dell'*underlying* grafo  $|G'|$  ha grado maggiore od uguale a 2 e ogni componente connessa di  $|G'|$  contiene almeno due vertici. Per il Teorema 4.3, ogni componente connessa di  $|G'|$  non può essere un albero. Pertanto contiene almeno un ciclo. In conclusione,  $G$ , contenendo almeno un ciclo, non è una foresta. Assurdo. ■

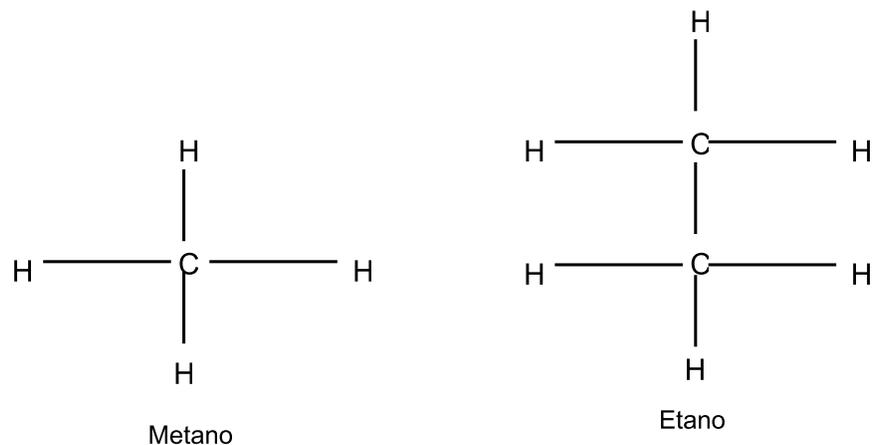
**Teorema 4.6** *Sia  $G$  un digrafo con  $n$  vertici e  $p$  componenti connesse. Allora la matrice di incidenza  $B_G$  di  $G$  ha rango  $n - p$ .*

**Dimostrazione.** (Dimostrazione facoltativa). Per la proprietà 4 di (vedi pag. 14),  $B_G$  ha rango minore od uguale a  $n - 1$ . Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 4.5, il rango di  $B_G$  coincide col numero di spigoli di una foresta massimale  $T$  contenuta in  $|G|$ . Se  $p = 1$ ,  $T$  è un albero e, per il Teorema 4.2, ha esattamente  $n - 1 = n - p$  spigoli e il teorema è dimostrato. Sia ora,  $p > 1$ . Allora  $G$  può essere partizionato nelle sue  $p$  componenti connesse e quindi  $T$  è l'unione disgiunta di  $p$  alberi. Supponiamo che questi alberi abbiano  $n_1, n_2, \dots, n_p$  vertici, rispettivamente. Allora  $B_G$  ha rango  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_p - 1) = n - p$ . ■

## 5 Un'applicazione alla chimica

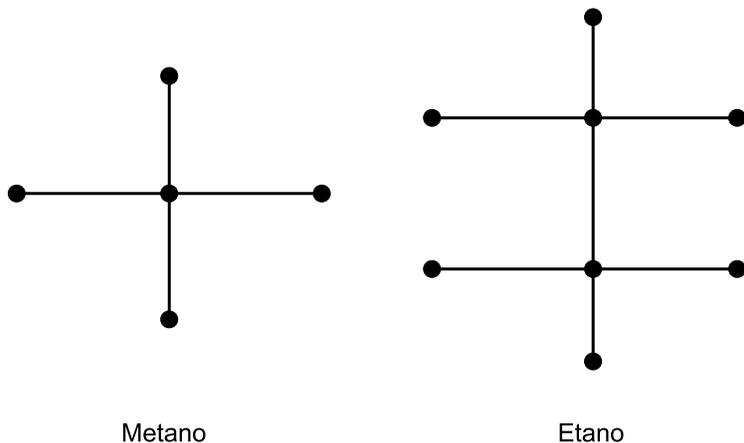
Nel 1857, Arthur Cayley ha scoperto gli alberi mentre stava enumerando tutti gli isomeri degli idrocarburi saturi, composti chimici della forma  $C_kH_{2k+2}$ . Questo lavoro è stato l'antesigiano

di un larghissimo numero di lavori che sfruttano la teoria dei grafi per risolvere problemi di chimica e biochimica.



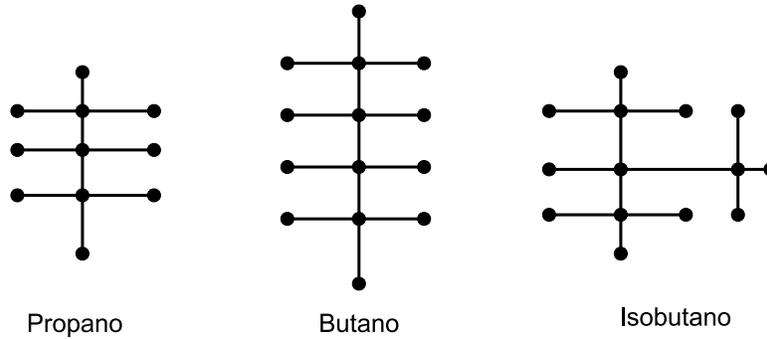
**Figura 18**

Gli isomeri  $C_kH_{2k+2}$  possono essere rappresentati nel seguente modo: si indichi ogni atomo di carbonio con la lettera  $C$ , ogni atomo di idrogeno con  $H$  e si tracci uno spigolo fra due di questi atomi se essi hanno un legame nel dato composto. Per esempio, il metano e l'etano sono mostrati in Figura 18. Possiamo vedere questi diagrammi come grafi sostituendo ogni lettera con un vertice, come mostrato in Figura 19. I grafi così ottenuti sono noti come i *grafi dei legami chimici*.



**Figura 19**

Si osservi che si può risalire facilmente dal grafo dei legami chimici di un dato idrocarburo al suo diagramma chimico rappresentando i vertici con la lettera  $C$  oppure con la lettera  $H$  senza alcuna ambiguità: un vertice si rappresenta con  $C$  se ha grado 4 (si osservi che il carbonio ha valenza 4), si rappresenta con  $H$  se ha grado 1 (l'atomo di idrogeno ha valenza 1). I grafi dei legami chimici hanno vertici o di grado 4 oppure di grado 1. In Figura 20 mostriamo i grafi dei legami chimici di altri idrocarburi saturi.



**Figura 20**

Si noti che i grafi delle Figure 19 e 20 sono tutti alberi. Si dimostra che questo fatto non è una semplice coincidenza, infatti *il grafo dei legami chimici di ogni idrocarburo saturo è un albero*. Per dimostrare ciò indichiamo con  $G = (V, E)$  il grafo dei legami chimici di  $C_kH_{2k+2}$ . Si ha  $|V| = k + 2k + 2 = 3k + 2$ . Ricordando che ogni atomo di carbonio ha grado 4 e ogni atomo di idrogeno ha grado 1, abbiamo

$$\sum_{x \in V} d(x) = 4k + 1(2k + 2) = 6k + 2.$$

Per il Teorema 1.1,

$$|E| = \frac{\sum_{x \in V} d(x)}{2} = 3k + 1.$$

Abbiamo quindi  $|E| = |V| - 1$ . Poichè il grafo dei legami chimici di  $C_kH_{2k+2}$  deve essere connesso, dal Teorema 4.2 segue che  $G$  è un albero.

Cayley ha generalizzato il problema di individuare tutti i possibili idrocarburi saturi a quello di enumerare tutti i possibili alberi i cui vertici hanno grado 4 oppure 1. Egli trovò più semplice risolvere quest'ultimo problema e, inoltre, scoprì i grafi dei legami chimici di idrocarburi fino a quel momento ignoti che successivamente vennero scoperti.

## 6 Grafi euleriani

**Definizione 6.1** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo o un multigrafo. Un cammino che percorre tutti gli spigoli di  $G$  una ed una sola volta dicesi euleriano. Un grafo o un multigrafo  $G$  si dice semieuleriano se contiene almeno un cammino euleriano. Se  $G$  ha almeno un cammino chiuso euleriano si dice euleriano*

Ovviamente ogni grafo o multigrafo euleriano è semieuleriano. Si osservi che un cammino chiuso euleriano non è detto che debba essere un ciclo. In Figura 21 sono rappresentati, nell'ordine, un grafo euleriano, un grafo semieuleriano ma non euleriano e un grafo non semieuleriano.

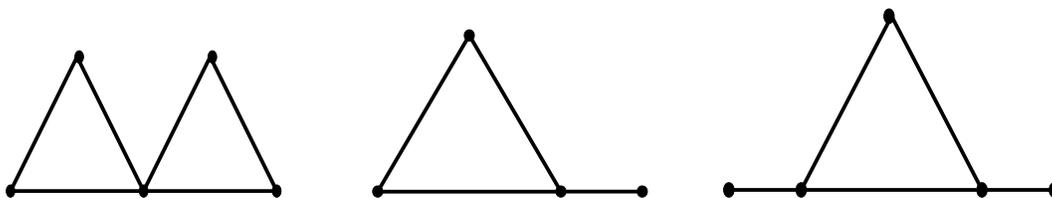


Figura 21

**Teorema 6.1** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo o un multigrafo connesso. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (a)  $G$  è euleriano.
- (b) Ogni vertice di  $G$  ha grado pari.
- (c) Esiste una decomposizione di  $G$  in cicli (esiste cioè una famiglia di cicli di  $G$  i cui insiemi di spigoli formano una partizione del multiinsieme  $E$ ).

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** (a)  $\rightarrow$  (b). Per ipotesi,  $G$  ha almeno un cammino chiuso  $\sigma$  euleriano. Poichè  $G$  è connesso,  $\sigma$  attraversa tutti i vertici di  $G$  percorrendo tutti gli spigoli una ed una sola volta. Quindi il grado di ogni vertice di  $G$  è pari.

(b)  $\rightarrow$  (c). Per ipotesi, ogni vertice di  $G$  ha grado pari. Se  $G$  fosse aciclico, esso sarebbe, per definizione, un albero, e quindi, per il Teorema 4.3, avrebbe almeno un vertice di grado 1, il che è escluso dall'ipotesi. Quindi  $G$  ha almeno un ciclo  $\sigma_1$ . Se  $G$  coincide con  $\sigma_1$ , la tesi è provata. Altrimenti, sopprimiamo in  $G$  tutti gli spigoli di  $\sigma_1$  e gli eventuali vertici che rimangono isolati dopo questa operazione. Quello che resta è un multigrafo  $G_1$  i cui vertici sono tutti di grado pari. Non è però detto che  $G_1$  sia connesso ma è possibile ripetere il ragionamento precedente per ogni componente connessa di  $G_1$ . Quindi ogni componente connessa di  $G_1$  contiene almeno un ciclo. Così procedendo, essendo  $G$  un multigrafo finito, si costruisce la sua decomposizione in cicli.

(c)  $\rightarrow$  (a). Per ipotesi esiste una decomposizione di  $G$  in cicli, sia essa  $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ . Se  $k = 1$ ,  $G = \sigma_1$  e l'asserto è provato. Sia  $k = 2$ , allora  $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Inoltre, essendo  $G$  connesso, i due cicli  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  devono avere almeno un vertice in comune. Sia esso  $x$ . Il cammino chiuso  $\gamma$  che da  $x$  percorre in sequenza tutti gli spigoli di  $\sigma_1$  e poi di  $\sigma_2$  attraversa tutti i loro spigoli una ed una sola volta, quindi è euleriano. Se  $k = 2$ , la tesi è provata. Se  $k = 3$  si ha  $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Essendo  $G$  connesso, possiamo supporre, senza ledere la generalità, che  $\sigma_1$  ha almeno un vertice in comune con  $\sigma_2$  e  $\sigma_2$  ha almeno un vertice in comune con  $\sigma_3$ . Operando su  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  come nel caso  $k = 2$ , si costruisce un cammino chiuso  $\gamma$  che percorre tutti gli spigoli di  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  una ed una sola volta. Ovviamente  $\gamma$  e  $\sigma_3$  hanno almeno un vertice in comune. Sia esso  $y$ . Il cammino chiuso che da  $y$  percorre in sequenza tutti gli spigoli di  $\sigma_3$  e poi di  $\gamma$  attraversa tutti i loro spigoli una ed una sola volta, quindi è euleriano. Se  $k = 3$ , la tesi è provata. Così procedendo, si perviene ad un cammino chiuso euleriano di  $G$ . ■

**Teorema 6.2** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo o un multigrafo connesso  $G = (V, E)$ , con  $|V| \geq 2$ , sia semieuleriano è che esistano almeno  $|V| - 2$  vertici di  $G$  aventi grado pari.*

**Dimostrazione.** (**Dimostrazione obbligatoria**). Condizione necessaria. Per ipotesi esiste un cammino euleriano  $\sigma$  congiungente due vertici  $x, y$  di  $G$ . Se  $x = y$ ,  $G$  è euleriano, e quindi, in virtù del Teorema 6.1, tutti i suoi vertici hanno grado pari. Se  $x \neq y$ , si consideri il multigrafo  $G'$  ottenuto da  $G$  aggiungendo lo spigolo  $\{x, y\}$  all'insieme dei suoi spigoli. Il cammino costituito da  $\sigma$  e dallo spigolo  $\{x, y\}$  costituisce un cammino chiuso euleriano di  $G'$ , e quindi, sempre per il Teorema 6.1, tutti i vertici di  $G'$  hanno grado pari. Ne segue:  $d_{G'}(x) = d_G(x) + 1$ ,  $d_{G'}(y) = d_G(y) + 1$  e, per ogni  $z \in V$  con  $z \notin \{x, y\}$ ,  $d_{G'}(z) = d_G(z)$  pertanto  $d_G(z)$  è pari per ogni  $z \in V \setminus \{x, y\}$ .

Condizione sufficiente. Supponiamo che  $G$  contenga almeno  $|V| - 2$  vertici di grado pari. Per la 2 del Teorema 1.1,  $G$  non può avere  $|V| - 1$  vertici di grado pari (altrimenti avrebbe un solo vertice di grado dispari). Quindi il numero di vertici di grado pari di  $G$  è o  $|V|$ , oppure  $|V| - 2$ . Nel primo caso, per il Teorema 6.1,  $G$  è euleriano e quindi semieuleriano. Nel secondo caso, detti  $x$  e  $y$  i due vertici di grado dispari, si costruisca il multigrafo  $G'$  aggiungendo all'insieme degli spigoli di  $G$  lo spigolo  $\{x, y\}$ . Ovviamente tutti i vertici di  $G'$  hanno grado pari. Cosicché  $G'$  è euleriano. Esiste quindi un cammino chiuso euleriano  $\sigma'$  di  $G'$ . Rimuovendo da  $\sigma'$  lo spigolo  $\{x, y\}$ , si ottiene un cammino euleriano di  $G$ . ■

Ovviamente, quanto detto in questo paragrafo può essere riformulato per i digrafi e i multigrafi orientati.

In un multigrafo orientato  $G$ , un cammino orientato che percorre tutti gli spigoli di  $G$  si dice cammino orientato euleriano.  $G$  si dice *euleriano* se ha almeno un cammino orientato euleriano e chiuso.

Il Teorema 6.1 si può riformulare nel seguente modo.

**Teorema 6.3** *Sia  $G = (V, E)$  un multigrafo orientato connesso. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (a)  $G$  è euleriano.
- (b)  $d_G^-(x) = d_G^+(x)$  per ogni  $x \in V$ .
- (c) Esiste una decomposizione di  $G$  in cicli orientati i cui spigoli inducono una partizione del multiinsieme  $E$ .

## 7 Grafi hamiltoniani

**Definizione 7.1** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo. Un cammino (path o ciclo) di  $G$  che attraversa tutti i vertici di  $G$  una ed una sola volta dicesi hamiltoniano. Se  $G$  ha almeno un cammino hamiltoniano si dice semihamiltoniano. Se  $G$  ha almeno un ciclo hamiltoniano si dice hamiltoniano*

Ovviamente ogni grafo hamiltoniano è semihamiltoniano. In Figura 22 sono rappresentati, nell'ordine, un grafo hamiltoniano, un grafo semihamiltoniano ma non hamiltoniano e un grafo non semihamiltoniano.

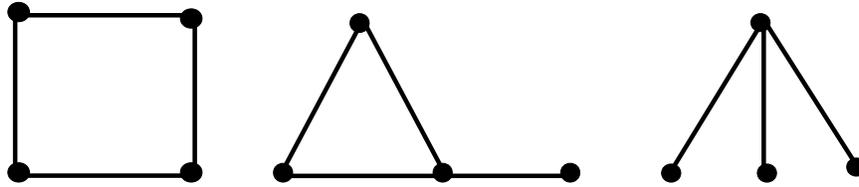


Figura 22

I concetti di grafo hamiltoniano e grafo euleriano sono indipendenti. Infatti, per esempio, il grafo completo su 4 vertici,  $K_4$ , è hamiltoniano ma non semieuleriano, mentre il grafo di Figura 23 è euleriano ma non semihamiltoniano

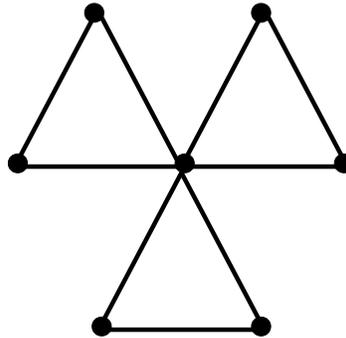


Figura 23

Si osservi inoltre che tutti i grafi completi,  $K_n$ , con  $n \geq 3$  vertici, sono hamiltoniani, mentre non tutti i grafi completi bipartiti lo sono. Per esempio  $K_{2,2}$  e  $K_{3,3}$  sono hamiltoniani, mentre  $K_{1,3}$  e  $K_{2,3}$  non lo sono.

I teoremi del Paragrafo 6 costituiscono importanti caratterizzazioni dei grafi euleriani e semieuleriani, ed è ragionevole attendersi che esistano analoghi criteri per i grafi hamiltoniani e semihamiltoniani. Invece, la ricerca di simili caratterizzazioni per i grafi hamiltoniani presenta, a dispetto dell'apparente somiglianza, difficoltà profondamente diverse. Infatti, per decidere se un grafo è euleriano, è sufficiente esaminare il grado dei suoi vertici, mentre la caratterizzazione dei grafi hamiltoniani costituisce uno dei problemi aperti più rilevanti della matematica discreta.

**Teorema 7.1** *Sia  $G$  un grafo non hamiltoniano avente almeno tre vertici. Allora è possibile aggiungere a  $G$  un opportuno numero di spigoli in modo che il grafo che si ottiene sia hamiltoniano.*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Siano  $x$  e  $y$  due vertici non adiacenti del grafo (essi devono esistere altrimenti,  $G$  sarebbe un grafo completo con  $n \geq 3$  vertici e quindi hamiltoniano). Sia  $G'$  il grafo ottenuto aggiungendo a  $G$  lo spigolo  $\{x, y\}$ . Se  $G'$  non è hamiltoniano (e quindi sicuramente non è completo), si iteri il procedimento scegliendo in esso due vertici non adiacenti. Alla fine, si perviene ad un grafo hamiltoniano. ■

**Teorema 7.2 (Bondy-Chvátal, 1976).** *Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 3$  vertici contenente due vertici non adiacenti  $x$  e  $y$  tali che  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ . Sia  $G'$  il grafo ottenuto aggiungendo a  $G$  lo spigolo  $\{x, y\}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $G$  sia hamiltoniano è che lo sia  $G'$ .*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** La condizione necessaria è immediata. Proviamo la sufficienza. Sia  $G'$  hamiltoniano e supponiamo per assurdo che  $G$  non abbia un ciclo hamiltoniano. Allora  $G'$  contiene un ciclo hamiltoniano che, necessariamente, fra i suoi spigoli ha  $\{x, y\}$ . Sia esso

$$\langle x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x \rangle .$$

Se  $n = 3$ , si ha chiaramente  $d_G(x) + d_G(y) = 2$ , il che è escluso dall'ipotesi. Sia quindi  $n > 3$ . Si osservi che, per ogni  $i \in \{2, \dots, n-2\}$  per cui  $y$  ed  $a_i$  sono adiacenti,  $x$  ed  $a_{i-1}$  non possono essere adiacenti, perchè, in caso contrario, il cammino

$$\langle y, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, x, a_{i-1}, \dots, a_1, y \rangle$$

sarebbe un ciclo hamiltoniano di  $G$ . Detto  $p$  il numero di vertici dell'insieme  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$  che sono adiacenti a  $y$ , tra essi ne esistono almeno  $p-1$  che non sono adiacenti a  $x$ , cosicchè  $d_G(x) + d_G(y) \leq n-2 - (p-1) + p = n-1$ , il che è contro l'ipotesi. ■

**Corollario 7.1 (Ore, 1960).** *Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 3$  vertici. Se  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$  per ogni coppia di vertici non adiacenti di  $G$ , allora  $G$  è hamiltoniano.*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Sia  $\mathcal{F}$  l'insieme delle coppie di vertici non adiacenti di  $G$ . Se  $\mathcal{F}$  è vuoto,  $G$  coincide con  $K_n$  e quindi, essendo  $n \geq 3$ , è hamiltoniano. Ovviamente  $\mathcal{F}$  è un insieme finito. Sia  $\mathcal{F} = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_k, y_k\}\}$ . Sia  $G_1$  il grafo ottenuto aggiungendo a  $G$  lo spigolo  $\{x_1, y_1\}$ . Per il Teorema 7.2,  $G$  è hamiltoniano se e solo se lo è  $G_1$ . Sia  $G_2$  il grafo ottenuto aggiungendo a  $G_1$  lo spigolo  $\{x_2, y_2\}$ . Per il Teorema 7.2,  $G_1$  è hamiltoniano se e solo se lo è  $G_2$ . Così procedendo, sia alla fine  $G_k$  il grafo ottenuto aggiungendo a  $G_{k-1}$  lo spigolo  $\{x_k, y_k\}$ . Per il Teorema 7.2,  $G_{k-1}$  è hamiltoniano se e solo se lo è  $G_k$ . Ma  $G_k$  coincide col grafo completo  $K_n$  e quindi è hamiltoniano. ■

**Corollario 7.2 (Dirac, 1952).** *Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 3$  vertici. Se ogni vertice di  $G$  ha grado maggiore od uguale a  $\frac{n}{2}$ , allora  $G$  è hamiltoniano.*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Siano  $x$  e  $y$  due vertici non adiacenti di  $G$ . Allora  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ . Per il Corollario 7.1, si ha la tesi.  $\blacksquare$

Si osservi che il Corollario 7.2 è una banale conseguenza del Corollario 7.1 che, a sua volta, segue facilmente dal Teorema 7.2. Ma storicamente è avvenuto proprio il contrario: nel 1952 Dirac ha dimostrato il suo risultato; successivamente, Ore nel 1960 lo ha generalizzato. Questo risultato è stato ulteriormente migliorato da Bondy e Chvátal nel 1976.

## 8 Grafi planari

**Definizione 8.1** *Un grafo si dice planare se può essere rappresentato nel piano in modo tale che due qualunque suoi spigoli non si intersechino in punti che non siano vertici.*

**Esempio 8.1** Il grafo  $K_4$  è planare poichè esso può essere disegnato come nella Figura 24.

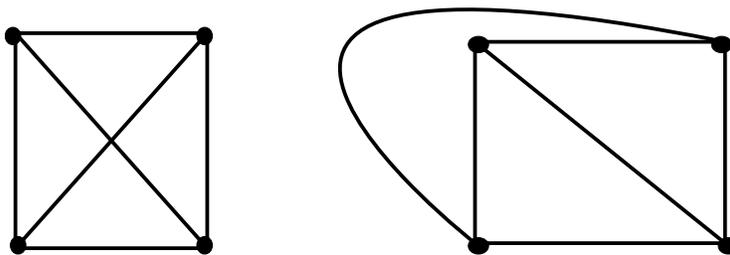


Figura 24

**Esempio 8.2** Il grafo  $K_{3,3}$  (Figura 25) non è planare. Infatti in ogni

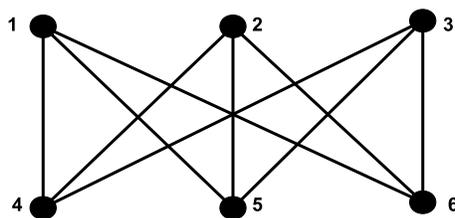


Figura 25

rappresentazione planare di  $K_{3,3}$ , entrambi i vertici 1 e 2 devono essere connessi a 4 e 5. Questi quattro vertici formano un ciclo che dividono il piano in due regioni  $R_1$  e  $R_2$  come mostrato in Figura 26 (a). Il vertice 3 è interno o ad  $R_1$  oppure ad  $R_2$ . Supponiamo che 3 stia in  $R_2$  (analogamente si procederà se 3 è in  $R_1$ ). Gli spigoli  $\{3, 4\}$  e  $\{3, 5\}$  separano  $R_2$  nelle due sottoregioni  $R_{21}$  e  $R_{22}$ , come mostrato in Figura 26 (b).

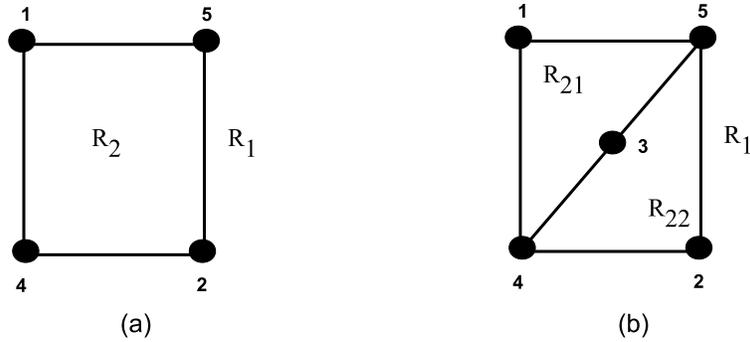


Figura 26

Non c'è alcun modo di disegnare il vertice 6, e gli spigoli ad esso adiacenti, senza creare un incrocio con qualcuno dei precedenti spigoli. Infatti, se disegniamo 6 in  $R_1$ , lo spigolo  $\{6, 3\}$  deve necessariamente intersecare uno degli spigoli già tracciati. Se 6 lo poniamo in  $R_{21}$  (oppure in  $R_{22}$ ) sarà lo spigolo  $\{6, 2\}$  ( $\{6, 1\}$ , rispett.) a creare un'intersezione.

Una rappresentazione planare di un grafo, quando esiste, partiziona il piano in *regioni* o *facce*, inclusa una regione non limitata. Per esempio, la rappresentazione piana del grafo planare mostrata in Figura 27 separa il piano in sei regioni. Esse sono indicate con i simboli  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

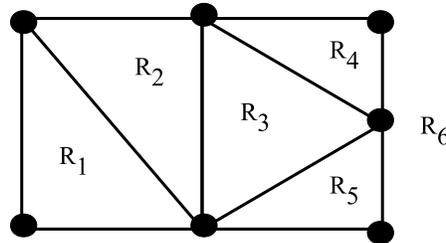


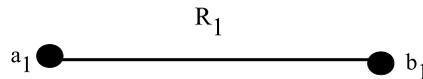
Figura 27

Eulero ha dimostrato che tutte le rappresentazioni piane di uno stesso grafo planare partizionano il piano sempre nello stesso numero di regioni. Egli ha provato questo fatto determinando una formula che mette in relazione il numero delle regioni, il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero delle componenti connesse di un grafo planare.

**Teorema 8.1 Formula di Eulero per i grafi planari (1738).** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo planare avente  $p$  componenti connesse. Sia  $|V| = v$  e  $|E| = e$ . Indicato con  $r$  il numero delle regioni determinate da una rappresentazione piana di  $G$ . Allora*

$$r = e + p - v + 1. \quad (6)$$

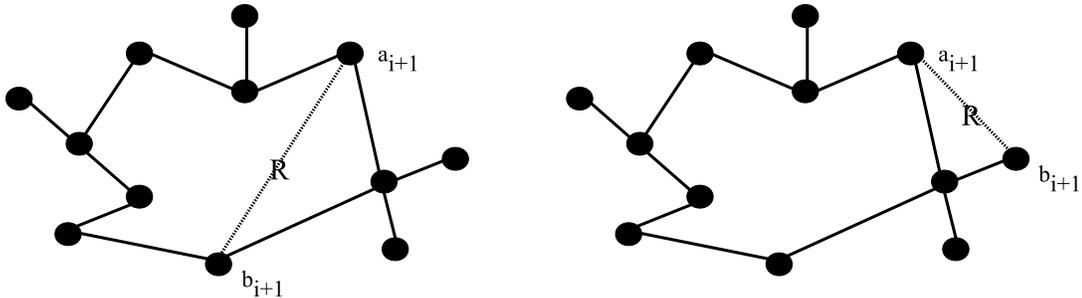
**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Supponiamo dapprima che  $G$  sia connesso, cioè  $p = 1$ . Allora la (6) diventa  $r = e - v + 2$ . Proveremo questa uguaglianza costruendo una successione di sottografi  $G_1, G_2, \dots, G_e = G$  ottenuta aggiungendo, ad ogni passo, un nuovo spigolo. Più precisamente, sia  $G_1$  il sottografo costituito da uno spigolo di  $G$  preso a piacere. In generale, per  $i = 2, \dots, e$ , il sottografo  $G_i$  si ottiene aggiungendo a  $G_{i-1}$  un nuovo spigolo che sia incidente con  $G_{i-1}$ . Questa costruzione è possibile perchè, per il momento, abbiamo supposto che  $G$  è connesso. Ovviamente al passo  $e$  abbiamo  $G_e = G$ . Inoltre, di ogni  $G_i$  si può dare una rappresentazione planare che sia indotta dalla rappresentazione planare di  $G$ . Per  $i = 1, 2, \dots, e$ , siano  $r_i, e_i$  e  $v_i$  rispettivamente il numero delle regioni, spigoli e vertici di questa rappresentazione planare di  $G_i$ . Per  $G_1$  vale la relazione  $r_1 = e_1 - v_1 + 2$  perchè, come si vede in Figura 28,  $r_1 = e_1 = 1$  e  $v_1 = 2$ .



**Figura 28**

Ora, supponiamo che per  $G_i$  valga l'uguaglianza  $r_i = e_i - v_i + 2$ . Sia  $\{a_{i+1}, b_{i+1}\}$  lo spigolo che si aggiunge a  $G_i$  per ottenere  $G_{i+1}$ . Abbiamo due casi:

1. Sia  $a_{i+1}$  che  $b_{i+1}$  sono due vertici di  $G_i$ . Allora entrambi devono trovarsi sulla frontiera comune di una stessa regione  $R$ , altrimenti sarebbe impossibile aggiungere a  $G_i$  lo spigolo  $\{a_{i+1}, b_{i+1}\}$  senza creare intersezioni (altrimenti si contraddirebbe la planarità di  $G_{i+1}$ ). L'aggiunta di questo nuovo spigolo divide  $R$  in due regioni (si veda la Figura 29). Quindi,  $r_{i+1} = r_i + 1$ ,  $e_{i+1} = e_i + 1$  e  $v_{i+1} = v_i$ . Dalle quali segue l'uguaglianza  $r_{i+1} = e_{i+1} - v_{i+1} + 2$ .



**Figura 29**

2. Uno dei due vertici dello spigolo  $\{a_{i+1}, b_{i+1}\}$  non appartiene a  $G_i$ . Supponiamo sia esso  $b_{i+1}$ . Aggiungendo questo nuovo spigolo non si producono nuove regioni perchè  $b_{i+1}$  deve stare in una regione la cui frontiera contiene  $a_{i+1}$  (si veda la Figura 30).

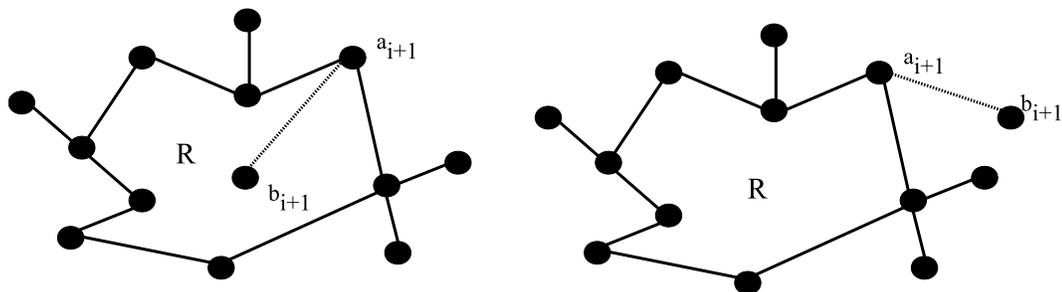


Figura 30

Di conseguenza,  $r_{i+1} = r_i$ . Inoltre si ha  $e_{i+1} = e_i + 1$ ,  $v_{i+1} = v_i + 1$ . Dalle quali segue l'uguaglianza  $r_{i+1} = e_{i+1} - v_{i+1} + 2$ .

Pertanto (6) resta provata nel caso in cui  $G$  è connesso. Consideriamo ora il caso generale in cui  $G$  ha  $p$  componenti connesse  $G_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ . Per ogni  $j$  vale la relazione  $r_j = e_j - v_j + 2$ , e quindi  $\sum_{j=1}^p (r_j - e_j + v_j) = 2p$ . D'altra parte  $\sum_{j=1}^p v_j = v$ ,  $\sum_{j=1}^p e_j = e$ ,  $\sum_{j=1}^p r_j = r + (p-1)$ , dato che la regione infinita deve essere contata solo una volta. Dunque si ha la (6). ■

**Definizione 8.2** *Dicesi grado di una regione  $R$  il numero degli spigoli della sua frontiera facendo attenzione che se uno spigolo occorre due volte nella frontiera (cioè esso è percorso due volte se si percorre tutta la frontiera) allora esso contribuisce due volte nel grado.*

**Esempio 8.3** Sia dato il grafo planare di Figura 31. Allora  $\text{grado}(R_1) = 3$ ,  $\text{grado}(R_2) = 6$ ,  $\text{grado}(R_3) = 7$ .

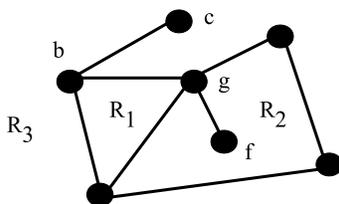


Figura 31

**Corollario 8.1** *Sia  $G$  un grafo planare connesso avente  $v \geq 3$  vertici ed  $e$  spigoli. Allora  $e \leq 3v - 6$ .*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Una rappresentazione planare di  $G$  divide il piano in un certo numero, diciamo  $r$ , di regioni. Il grado di ogni regione è almeno 3. In particolare, il grado della regione illimitata è almeno 3 poichè  $G$  è connesso e contiene almeno tre vertici. Si osservi inoltre che la somma dei gradi delle regioni è esattamente il doppio del numero degli spigoli del grafo in quanto ogni spigolo o è alla frontiera di due

regioni diverse, oppure è contato due volte come frontiera di una stessa regione. Poichè il grado di ogni regione è maggiore od uguale a tre, abbiamo

$$2e = \sum_{\text{tutte le regioni } R} \text{grado}(R) \geq 3r.$$

Quindi,  $\frac{2}{3}e \geq r$ . Per la formula di Eulero (6), con  $p = 1$ , si ha  $e - v + 2 = r \leq \frac{2}{3}e$ . Da cui l'asserto.  $\blacksquare$

**Corollario 8.2** *Un grafo planare connesso ha almeno un vertice il cui grado è minore od uguale a 5.*

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria).** Sia  $G = (V, E)$  un grafo planare connesso e supponiamo  $|V| = v$  ed  $|E| = e$ . Per  $v = 1$  o  $v = 2$  il risultato è immediato. Sia ora  $v \geq 3$ . Per il Corollario 8.1, si ha  $2e \leq 6v - 12$ . Se, per assurdo, fosse  $d_G(x) \geq 6$  per ogni  $x \in V$  avremmo, per il Teorema 1.1,  $2e = \sum_{x \in V} d_G(x) \geq 6v$ , e ciò è in contraddizione con la disuguaglianza  $2e \leq 6v - 12$  precedentemente ottenuta. Ne segue che esiste almeno un vertice avente grado minore di 6.  $\blacksquare$

**Esempio 8.4** Dimostrare che  $K_5$  non è planare usando il Corollario 8.1.

Il grafo  $K_5$  ha 5 vertici e 10 spigoli. Poichè la disuguaglianza  $e \leq 3v - 6$  non è soddisfatta,  $K_5$  non è planare.

Si osservi che il grafo  $K_{3,3}$  ha  $v = 6$  vertici e  $e = 9$  spigoli e verifica la disuguaglianza  $e \leq 3v - 6$ . Ma, come abbiamo visto nell'Esempio 8.2,  $K_{3,3}$  non è planare. Pertanto il Corollario 8.1 esprime una condizione necessaria ma non sufficiente affinché un grafo connesso sia planare. In modo analogo al Corollario 8.1 si dimostra il seguente risultato.

**Corollario 8.3** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo planare connesso con  $|V| = v \geq 3$  ed  $|E| = e$ . Se  $G$  non ha cicli di lunghezza 3, allora  $e \leq 2v - 4$ .*

Dal precedente corollario segue che  $K_{3,3}$  non è planare. Ovviamente se un grafo contiene come sottografo  $K_{3,3}$  o  $K_5$  (o entrambi) non è planare. Sorprendentemente, tutti i grafi non planari devono contenere un sottografo che può essere ottenuto da  $K_{3,3}$  o  $K_5$  usando certe operazioni che ora descriveremo.

Se un grafo è planare, lo sarà pure il grafo ottenuto da esso rimuovendo uno spigolo  $\{x, y\}$  e aggiungendo un nuovo vertice  $z$  insieme agli spigoli  $\{z, x\}$  e  $\{z, y\}$ . Una tale operazione si dice *suddivisione elementare*.

**Definizione 8.3** *Due grafi  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  si dicono omeomorfi se possono essere ottenuti da uno stesso grafo  $G$  mediante una successione di suddivisioni elementari.*

I tre grafi della Figura 32 sono omeomorfi, poichè tutti possono essere ottenuti dal primo mediante suddivisioni elementari.

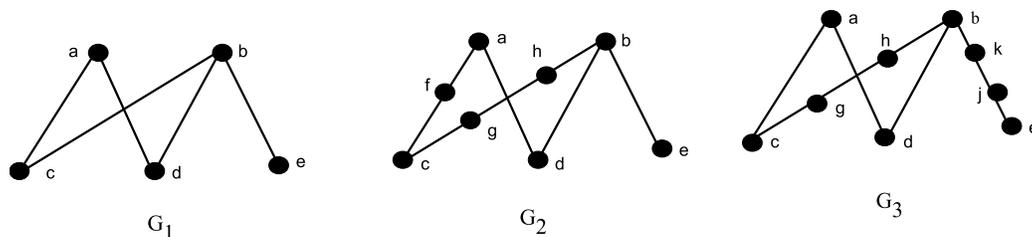
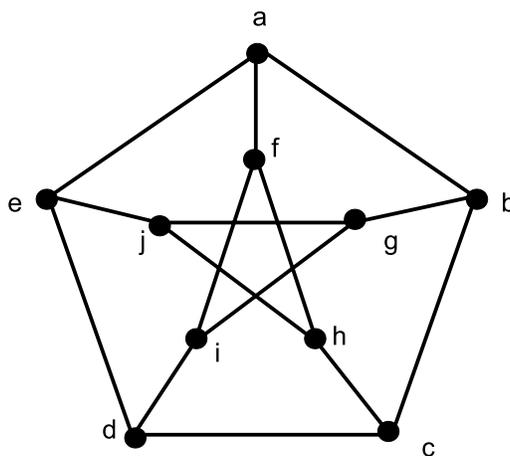


Figura 32

Il matematico polacco Kazimierz Kuratowski stabilì il seguente risultato di cui omettiamo la, non semplice, dimostrazione.

**Teorema 8.2 (Kuratowski, 1930.)** *Un grafo non è planare se e solo se esso contiene un sottografo omeomorfo a  $K_{3,3}$  oppure a  $K_5$ .*

**Esempio 8.5** Mostrare che il grafo di Petersen non è planare.



Grafo di Petersen

Sia  $H$  il sottografo ottenuto dal grafo di Petersen cancellando il vertice  $b$  e gli spigoli  $\{b, a\}$ ,  $\{b, c\}$  e  $\{b, g\}$  (una rappresentazione piana di questo sottografo è mostrata in Figura 33).

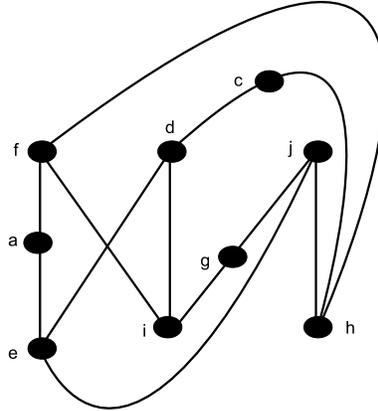


Figura 33

Si consideri ora il grafo  $K_{3,3}$  con insieme dei vertici  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 = \{f, d, j\}$  e  $V_2 = \{e, i, h\}$  (si veda la Definizione 1.9). Su di esso si operino le seguenti suddivisioni elementari:

- rimuovere lo spigolo  $\{d, h\}$  ed aggiungere il nuovo vertice  $c$  e gli spigoli  $\{c, h\}$  e  $\{c, d\}$ ;
- rimuovere lo spigolo  $\{e, f\}$  ed aggiungere il nuovo vertice  $a$  e gli spigoli  $\{a, e\}$  e  $\{a, f\}$ ;
- rimuovere lo spigolo  $\{i, j\}$  ed aggiungere il nuovo vertice  $g$  e gli spigoli  $\{g, i\}$  e  $\{g, j\}$ .

Il risultato è il grafo  $H$  che pertanto risulta omeomorfo a  $K_{3,3}$ . Per il Teorema 8.2, il grafo di Petersen non è planare.

Esiste un'altra interessante caratterizzazione dei grafi planari. Siano  $x$  e  $y$  due vertici adiacenti di un grafo  $G = (V, E)$ , una *contrazione elementare*, o una *contrazione dello spigolo*  $\{x, y\}$ , consiste nell'eliminare lo spigolo  $\{x, y\}$ , identificare i vertici  $x$  e  $y$  (cioè se  $t \notin V$ , si pone  $x = y = t$ ), congiungere il nuovo vertice  $t$  a tutti i vertici che prima erano congiunti a  $x$  o ad  $y$  (se prima sia  $x$  che  $y$  erano congiunti ad uno stesso vertice  $z$ , nel nuovo grafo si mette un solo spigolo  $\{t, z\}$ ). Nella Figura 34 mostriamo una contrazione elementare che trasforma il grafo  $G$  nel grafo  $H$ .

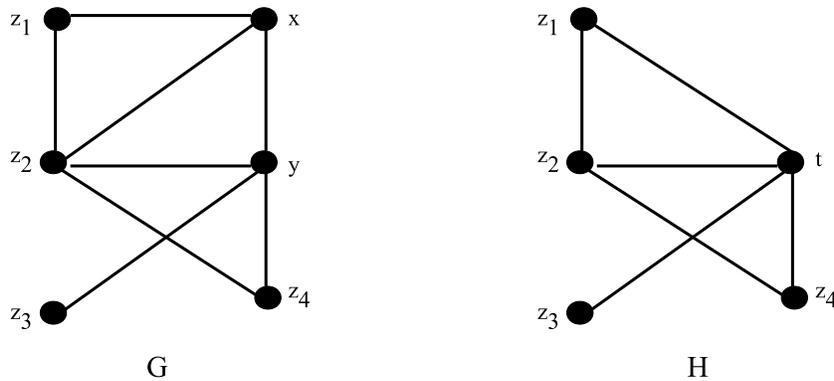
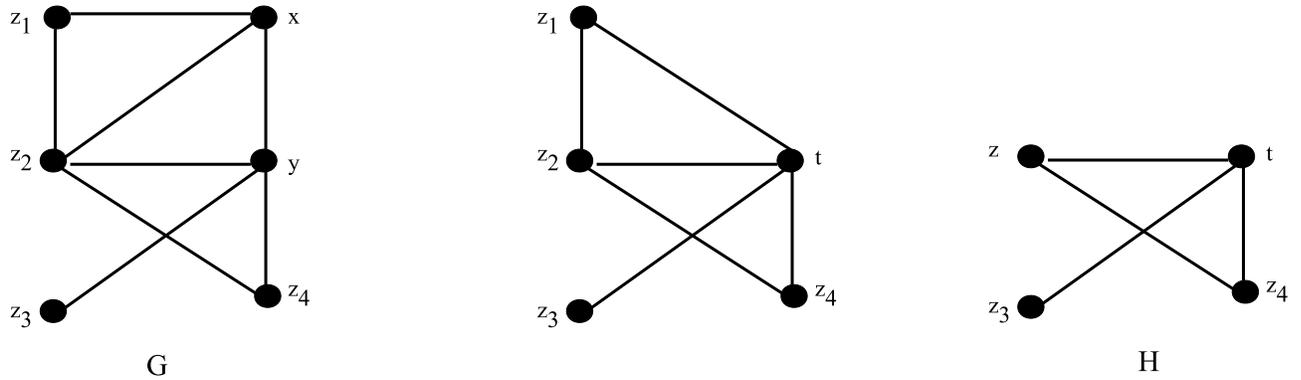


Figura 34

**Definizione 8.4** Il grafo  $G$  si dice *contraibile* nel grafo  $H$ , oppure che  $H$  è una *contrazione* di  $G$ , se  $H$  può essere ottenuto da  $G$  mediante una successione di contrazioni elementari.

Nella Figura 35 mostriamo una contrazione di  $G$  in  $H$  mediante le due contrazioni elementari: 1) Contrazione nello spigolo  $\{x, y\}$ : identificare i vertici adiacenti  $x$  e  $y$  col nuovo vertice  $t$ . 2) Contrazione nello spigolo  $\{z_1, z_2\}$ : identificare i vertici adiacenti  $z_1$  e  $z_2$  col nuovo vertice  $z$ .

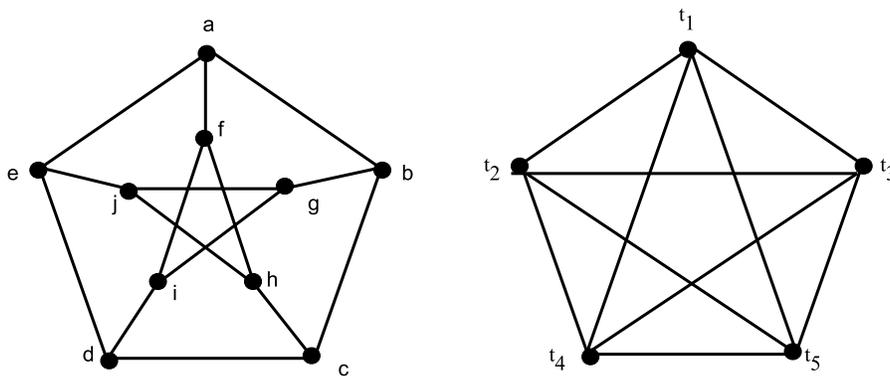


**Figura 35**

Vale il seguente teorema.

**Teorema 8.3 (Wagner, 1937.)** *Un grafo non è planare se e solo se esso contiene un sottografo contraibile in  $K_{3,3}$  oppure in  $K_5$ .*

Si osservi che il grafo di Petersen, avendo ogni vertice di grado 3, non ha alcun sottografo omeomorfo a  $K_5$ . Come mostra la Figura 36, il grafo di Petersen è invece contraibile in  $K_5$ .



**Figura 36**

## 9 Colorazioni dei vertici di un grafo

In ogni cartina geografica, due diversi stati confinanti sono disegnati, per evitare confusione, con colori differenti. Conveniamo inoltre che, in una cartina geografica, uno stato sia rappresentabile con una regione connessa del piano (cioè non sono ammesse enclavi) e che due stati sono confinanti se e solo se hanno una linea in comune e non soltanto un numero finito di punti. Con queste convenzioni, ogni cartina nel piano può essere rappresentata da un grafo planare. Per esempio la cartina

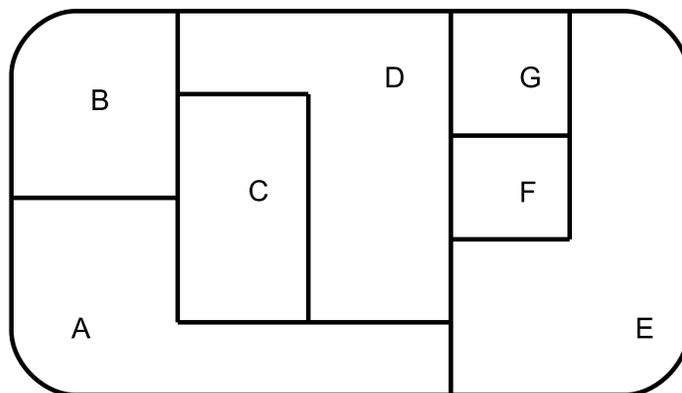


Figura 37

può essere rappresentata dal grafo di Figura 38.

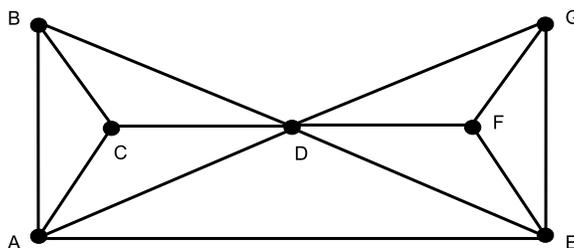


Figura 38

Il problema di colorare le regioni di una cartina equivale così a colorare i vertici del corrispondente grafo planare in modo che due vertici adiacenti abbiano colore diverso. Più in generale possiamo dare la seguente definizione.

**Definizione 9.1** Sia  $G = (V, E)$  un grafo e sia  $C$  un insieme non vuoto, detto insieme dei colori. Una colorazione di  $G$  è un'applicazione  $f : V \rightarrow C$  tale che, per ogni  $\{x, y\} \in E$ , si ha  $f(x) \neq f(y)$ . Se  $|C| = k$  diremo che il grafo  $G$  è  $k$ -colorabile.

Ogni grafo può essere colorato con  $|V|$  colori (cioè ogni grafo è  $|V|$ -colorabile). Il problema consiste nel trovare, per ogni grafo fissato, il minimo intero positivo  $k$  per cui esso risulti  $k$ -colorabile. Per esempio, il grafo della Figura 38 è 4-colorabile in quanto con 4 colori risulta facilmente colorabile mentre non esiste una sua colorazione con meno di 4 colori.

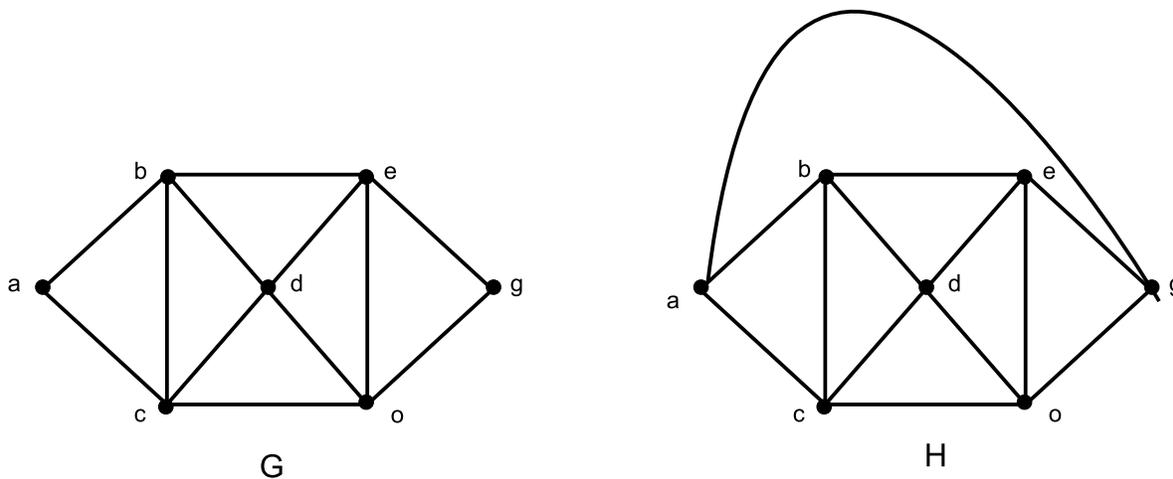
**Definizione 9.2** *Dicesi numero cromatico di un grafo  $G$ , e si indica con  $\chi(G)$ , il minimo intero positivo  $k$  per cui esiste una sua  $k$ -colorazione.*

Nel 1852, Francis Guthrie si rese conto che per colorare gli stati della Gran Bretagna erano sufficienti 4 colori e congetturò che questo fosse possibile per una qualsiasi cartina (che rispetti le condizioni precedentemente specificate). In termini matematici questo equivale ad affermare che ogni grafo planare sia 4-colorabile. È nato così il famoso *problema dei quattro colori* a lungo studiato ed anche (erroneamente) provato. Finalmente, con l'aiuto di un computer, nel 1976 Kenneth Appel e Wolfgang Haken hanno provato la validità della congettura di Guthrie.

**Teorema 9.1 Teorema dei quattro colori (K.Appel e W.Haken, 1976).** *Il numero cromatico di un grafo planare è minore od uguale a quattro.*

Si osservi che il Teorema dei quattro colori vale solo per grafi planari. Infatti, per esempio, il numero cromatico del grafo completo  $K_n$  è  $n$ .

**Esempio 9.1** Determinare i numeri cromatici dei grafi  $G$  ed  $H$  di Figura 39.



**Figura 39**

Deve essere  $\chi(G) \geq 3$  in quanto ai vertici  $a$ ,  $b$  e  $c$  devono essere assegnati colori diversi. Per provare che  $\chi(G) = 3$ , è sufficiente trovare una 3-colorazione. Posto  $C = \{1, 2, 3\}$ , possiamo definire  $f(b) = f(o) = 1$ ,  $f(e) = f(c) = 2$ ,  $f(a) = f(d) = f(g) = 3$ .

Per quanto riguarda  $H$ , si ha  $\chi(H) \geq 3$  ma non esiste una 3-colorazione. Infatti, posto  $f(b) = 1$ , necessariamente deve essere  $f(e) = 2$  e  $f(d) = 3$ . Se  $H$  fosse 3-colorabile dovremmo

avere  $f(a) = 3$  e  $f(g) = 3$ . Ne segue che non è possibile assegnare al vertice  $o$  un colore appartenente a  $\{1, 2, 3\}$ . Quindi non esiste una 3-colorazione di  $H$ . Una 4-colorazione di  $H$  segue facilmente ma è anche garantita dal Teorema dei quattro colori, infatti  $H$  è planare.

Non è difficile provare che il numero cromatico del grafo completo bipartito  $K_{m,n}$  è 2. Più in generale vale il seguente risultato.

**Teorema 9.2** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo connesso abbia numero cromatico 2 è che esso sia bipartito ed abbia almeno uno spigolo.*

Si osservi che il ciclo su  $n$  vertici  $C_n$  ha numero cromatico 2 se  $n$  è pari (infatti, in tal caso,  $C_n$  è anche un grafo connesso biartito), mentre, se  $n$  è dispari,  $\chi(C_n) = 3$ .

## 10 Polinomio cromatico

Il concetto di polinomio cromatico è stato introdotto da Birkhoff e Lewis nel 1946 nel tentativo di trovare una dimostrazione del Teorema dei 4 colori. Sia  $G$  un grafo. Indichiamo con  $P(G, x)$  il numero di modi in cui si può colorare  $G$  con al più  $x$  colori. Ovviamente,  $P(G, x)$  è 0 se non è possibile colorare  $G$  usando  $x$  colori. Il più piccolo intero positivo  $x$  per cui  $P(G, x) \neq 0$  è dato dal numero cromatico  $\chi(G)$  (si veda la Def. (9.2)). Uno dei principali motivi per determinare i numeri  $P(G, x)$  è proprio la ricerca del numero cromatico.

**Esempio 10.1** Determinare  $P(K_2, x)$  e  $P(K_4, x)$  per ogni  $x \geq 0$ .

Cominciamo col considerare  $K_2$  (Figura 40). Ovviamente,  $P(K_2, 0) = P(K_2, 1) = 0$ . Supponiamo ora, per esempio,  $x = 4$  e supponiamo che i colori a disposizione siano: Rosso (R), Verde (V), Blu (B), e Giallo (G).

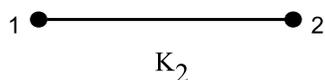


Figura 40

Il vertice 1 può essere colorato in 4 modi diversi. Una volta fissato il colore di 1, si hanno 3 modi diversi per colorare il vertice 2. Abbiamo quindi i casi mostrati nella seguente tabella.

1	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>G</i>	<i>G</i>
2	<i>V</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>G</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>B</i>

In generale, se i colori a disposizione sono  $x$ ,  $x \geq 2$ , ognuno di essi può essere usato per colorare il vertice 1, quindi uno ed uno solo dei rimanenti colori può essere usato per colorare 2. Per la regola del prodotto, si ha

$$P(K_2, x) = x(x - 1).$$

Consideriamo ora  $K_4$ . Indichiamo con  $\{1, 2, 3, 4\}$  il suo insieme dei vertici. Ovviamente,  $P(K_4, x) = 0$  per  $x = 0, 1, 2, 3$ . Sia  $x \geq 4$ . Avendo a disposizione  $x$  colori, vi sono  $x$  diverse possibilità di colorare il vertice 1. Per ognuna di esse, rimangono  $x - 1$  possibilità per il vertice 2 ( $\{1, 2\}$  è uno spigolo di  $K_4$ ). Una volta assegnati i colori ad 1 e 2 rimangono  $x - 2$  possibili colori per il vertice 3 ( $\{1, 3\}$  e  $\{2, 3\}$  sono spigoli di  $K_4$ ). Una volta colorati 1, 2 e 3, rimangono  $x - 3$  possibili colori per il vertice 4 ( $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 4\}$  e  $\{3, 4\}$  sono spigoli di  $K_4$ ). In definitiva,

$$P(K_4, x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Generalizzando l'Esempio 10.1, otteniamo il seguente risultato.

**Teorema 10.1** *Con al più  $x$  colori, il numero di distinte colorazioni del grafo completo con  $n \geq 1$  vertici  $K_n$  è*

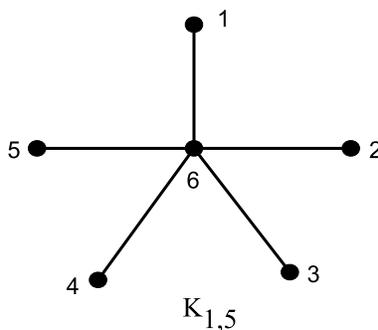
$$P(K_n, x) = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - n + 1).$$

Un altro risultato di facile dimostrazione è il seguente.

**Teorema 10.2** *Sia  $I_n$  il grafo avente  $n \geq 1$  vertici e 0 spigoli. Con al più  $x$  colori, il numero di distinte colorazioni di  $I_n$  è*

$$P(I_n, x) = x^n.$$

**Esempio 10.2** Determinare  $P(K_{1,5}, x)$  per ogni  $x \geq 0$ .



**Figura 41**

Avendo a disposizione  $x$  colori, vi sono  $x$  diverse possibilità di colorare il vertice 6. Per ognuna di esse, rimangono  $x - 1$  possibilità per il vertice 1 ( $\{1, 6\}$  è uno spigolo di  $K_{1,5}$ ). Una volta assegnati i colori a 6 e 1 restano ancora  $x - 2$  possibili colori per i vertici 2, 3, 4 e 5 (infatti  $\{6, 2\}$ ,  $\{6, 3\}$ ,  $\{6, 4\}$  e  $\{6, 5\}$  sono spigoli di  $K_{1,5}$ , mentre non c'è alcuno spigolo  $\{i, j\}$  per  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ). In definitiva,

$$P(K_{1,5}, x) = x(x - 1)^5 = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 - x.$$

**Esempio 10.3** Determinare  $P(C_4, x)$  per ogni  $x \geq 0$ .

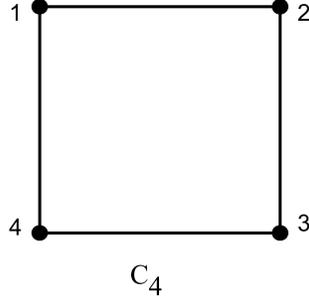


Figura 42

Avendo a disposizione  $x$  colori, vi sono  $x$  diverse possibilità di colorare il vertice 1. Ora, 2 e 4 devono ricevere un colore diverso da quello dato ad 1 ma essi potrebbero essere colorati con uno stesso colore o con due colori diversi. Quindi conviene considerare due casi:

- Caso 1. I vertici 2 e 4 hanno lo stesso colore. Quindi, fissato il colore di 1, rimangono  $x - 1$  possibilità diverse per colorare 2 e 4. Infine, 3 deve ricevere un colore diverso da quello di 2 o 4 ma può avere lo stesso colore dato ad 1. Quindi abbiamo a disposizione ancora  $x - 1$  colori per il vertice 3. In definitiva, il numero delle colorazioni diverse di  $C_4$  con al più  $x$  colori e con la condizione che 2 e 4 ricevano lo stesso colore è  $x(x - 1)^2$ .
- Caso 2. I vertici 2 e 4 hanno diverso colore. Il vertice 1 può essere colorato in  $x$  modi differenti. Rimangono  $x - 1$  colori per poter colorare 2 e  $x - 2$  colori per 4. Infine, per il vertice 3 restano disponibili  $x - 2$  colori (esso potrebbe essere colorato come 1). Pertanto il numero delle colorazioni diverse di  $C_4$  con al più  $x$  colori e con la condizione che 2 e 4 ricevano diverso colore è  $x(x - 1)(x - 2)^2$ .

Poichè si può verificare il Caso 1 oppure il 2, abbiamo, per la regola della somma,

$$P(C_4, x) = x(x - 1)^2 + x(x - 1)(x - 2)^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x.$$

**Teorema 10.3** *Siano  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , le  $k \geq 1$  componenti connesse del grafo  $G$ . Allora*

$$P(G, x) = P(G_1, x) \cdot P(G_2, x) \cdots P(G_k, x).$$

**Dimostrazione.** Per  $k = 1$  il teorema è evidente. Sia  $k = 2$ . Allora, usando al più  $x$  colori,  $G_1$  e  $G_2$  possono essere colorati, rispettivamente, in  $P(G_1, x)$  in  $P(G_2, x)$  modi differenti. Poichè nessun modo di colorare  $G_1$  implica una qualche particolare colorazione di  $G_2$ , per la regola del prodotto si ha  $P(G, x) = P(G_1, x) \cdot P(G_2, x)$ . Procedendo per induzione si ha la tesi. ■

Per esempio, sia  $G$  il grafo di Figura 43 formato dalle due componenti connesse  $G_1$  e  $G_2$ .

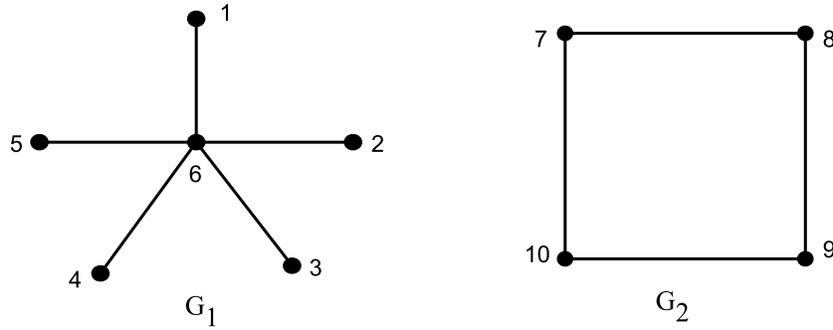


Figura 43

Allora si ha  $P(G, x) = P(G_1, x) \cdot P(G_2, x) = x^2(x-1)^7 + x^2(x-1)^6(x-2)^2$ .

Sia  $e = \{a, b\}$  uno spigolo del grafo  $G$ . Definiamo due nuovi grafi che si ottengono a partire da  $G$ :  $G'_e$  è il grafo che si ottiene cancellando in  $G$  lo spigolo  $e$  ma lasciando i vertici  $a$  e  $b$ ;  $G''_e$  è il grafo che si ottiene da  $G$  mediante la contrazione nello spigolo  $e$  (si veda pag. 44). La Figura 44 mostra il grafo  $G = K_3$  e i due grafi  $G'_e$  e  $G''_e$ .

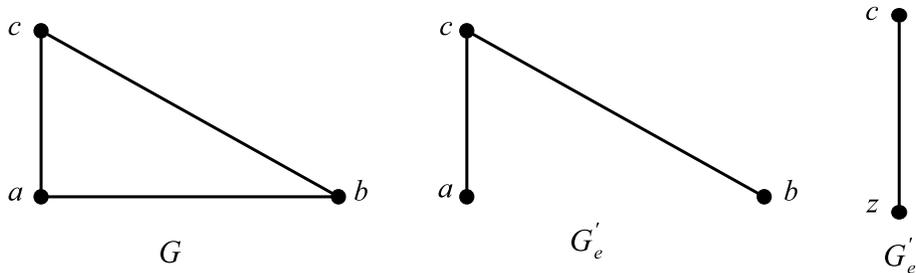


Figura 44

**Teorema 10.4 Teorema fondamentale di riduzione.** *Sia  $e = \{a, b\}$  uno spigolo del grafo  $G$ . Allora*

$$P(G, x) = P(G'_e, x) - P(G''_e, x).$$

**Dimostrazione. (Dimostrazione obbligatoria)** Abbiamo un massimo di  $x$  colori con cui colorare  $G'_e$ . I vertici  $a$  e  $b$  possono ricevere o lo stesso colore o colori differenti. Usando al più  $x$  colori, il numero di tutte le possibili colorazioni di  $G'_e$  in cui  $a$  e  $b$  sono colorati diversamente coincide con  $P(G, x)$ . D'altronde, il numero di tutte le possibili colorazioni di  $G'_e$  in cui  $a$  e  $b$  hanno lo stesso colore coincide con  $P(G''_e, x)$ . Quindi

$$P(G'_e, x) = P(G, x) + P(G''_e, x). \tag{7}$$

■

Sia  $G = P_3$  il path con tre vertici e due spigoli di Figura 45. Calcoliamo  $P(P_3, x)$  mediante il Teorema fondamentale di riduzione 10.4.

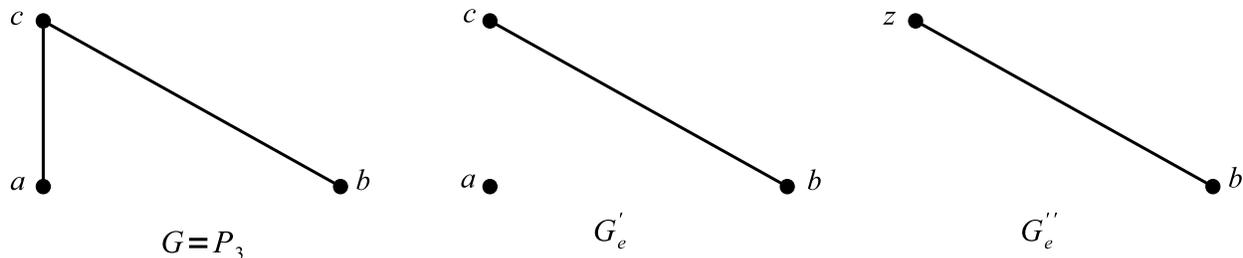


Figura 45

Scegliamo lo spigolo  $e = \{a, c\}$  e, come in Figura 45, formiamo i grafi  $G'_e$  e  $G''_e$ . Il grafo  $G''_e$  coincide con  $K_2$ ; allora, per il Teorema 10.1,  $P(G''_e, x) = x(x-1)$ . Il grafo  $G'_e$  ha le due componenti connesse  $K_1$  (il vertice isolato  $a$ ) e  $K_2$  (lo spigolo  $\{c, b\}$ ). Quindi, per il Teorema 10.3,  $P(G'_e, x) = P(K_1, x) \cdot P(K_2, x)$  e, per il Teorema 10.1,  $P(G'_e, x) = x \cdot x(x-1) = x^2(x-1)$ . Infine, per il Teorema 10.4, abbiamo  $P(P_3, x) = x^2(x-1) - x(x-1) = x(x-1)^2$ .

Si osservi ancora che anche  $P(K_2, x)$  potrebbe essere calcolato mediante il Teorema fondamentale di riduzione. Infatti, denotato con  $e = \{a, b\}$  l'unico spigolo di  $G = K_2$ , abbiamo  $G'_e = I_2$  e  $G''_e = I_1$ . Quindi  $P(K_2, x) = P(I_2, x) - P(I_1, x) = x^2 - x = x(x-1)$ . Si ha allora che

$$P(P_3, x) = P(K_2, x) \cdot [P(K_1, x) - 1] = [P(I_2, x) - P(I_1, x)] [P(I_1, x) - 1] = P(I_2, x) \cdot P(I_1, x) - P(I_1, x)^2 - P(I_2, x) + P(I_1, x).$$

Come secondo esempio, calcoliamo il valore di  $P(K_3, x)$  mediante il Teorema 10.4. Come precedentemente mostrato, posto  $G = K_3$  ed  $e = \{a, b\}$ , si ha  $G'_e = P_3$  e  $G''_e = K_2$ . Quindi

$$P(K_3, x) = P(P_3, x) - P(K_2, x) = P(I_2, x) \cdot P(I_1, x) - P(I_1, x)^2 - 2P(I_2, x) + 2P(I_1, x).$$

Come si vede dai precedenti esempi, mediante il Teorema fondamentale di riduzione, il calcolo di  $P(G, x)$  si riduce ad una espressione che è somma, prodotto o differenza di termini del tipo  $P(I_n, x) = x^n$ , per opportuni valori di  $n$ . Si ha quindi che  $P(G, x)$  è un polinomio, detto il *polinomio cromatico* di  $G$ .

**Corollario 10.1**  $P(G, x)$  è sempre un polinomio.

Diamo di seguito alcune proprietà del polinomio cromatico omettendone la dimostrazione.

**Teorema 10.5 Proprietà del polinomio cromatico.** *Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 1$  vertici,  $q \geq 0$  spigoli e  $k \geq 1$  componenti connesse. Allora:*

1.  $P(G, x)$  è un polinomio in  $x$  di grado  $n$ .
2. Il coefficiente di  $x^n$  è uguale ad 1.
3. Il coefficiente di  $x^{n-1}$  è uguale a  $-q$ .
4. Il termine noto del polinomio è 0.
5. Il monomio di grado minimo in  $P(G, x)$  è  $\alpha x^k$  per un opportuno intero  $\alpha$ .

6. Se  $G \neq I_n$ , la somma dei coefficienti dei monomi in  $P(G, x)$  è 0.

Per il teorema precedente,  $P(G, x)$  o coincide con  $x^n$ , se  $G = I_n$ , oppure, se  $G \neq I_n$ , è un polinomio del tipo

$$P(G, x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_{n-k}x^k \quad (8)$$

dove i coefficienti  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n - k$ , sono interi tali che  $a_1 = -q$  e  $1 + \sum_{i=1}^{n-k} a_i = 0$ .

**Teorema 10.6 (Whitney, 1932).** *Sia  $G$  un grafo con  $n \geq 1$  vertici,  $q \geq 1$  spigoli e  $k \geq 1$  componenti connesse. Sia (8) il suo polinomio cromatico. Allora gli  $a_i$ , per  $i = 1, \dots, n - k$ , sono tutti diversi da zero e, alternativamente, di segno opposto (cioè  $a_1 = -q < 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0, \dots$ ).*

Evidentemente, due grafi isomorfi hanno lo stesso polinomio cromatico, cioè avere lo stesso polinomio cromatico è invariante per isomorfismi. Questa proprietà, purtroppo, non caratterizza i grafi isomorfi. Infatti, esistono grafi non isomorfi aventi lo stesso polinomio cromatico. Nel seguente teorema proveremo, per esempio, che tutti gli alberi con  $n$  vertici hanno lo stesso polinomio cromatico.

**Teorema 10.7** *Un grafo  $G$  con  $n$  vertici è un albero se e solo se*

$$P(G, x) = \begin{cases} x & \text{se } n = 1 \\ x(x-1)^{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (9)$$

**Dimostrazione.** (Dimostrazione facoltativa) Sia  $G = (V, E)$  un albero con  $|V| = n$ . Vogliamo mostrare che vale la (9). Per  $n = 1, 2$  abbiamo, rispettivamente,  $P(G, x) = P(I_1, x) = x$  e  $P(G, x) = P(K_2, x) = x(x-1)$  e la (9) è provata. Sia ora  $n \geq 3$  e procediamo per induzione su  $n$ . Supponiamo che (9) vale per ogni albero  $H = (V', E')$  tale che  $|V'| = n - 1$ . Sia  $e = \{u, v\}$  uno spigolo di  $G$  con  $u$  di grado 1 (essendo  $n \geq 3$  un tale spigolo esiste sicuramente). Poniamo  $V' = V \setminus \{u\}$  ed  $E' = E \setminus \{e\}$ . Allora  $H = (V', E')$  è un albero con  $n - 1$  vertici. Per l'ipotesi induttiva,  $P(H, x) = x(x-1)^{n-2}$ . Applichiamo il Teorema fondamentale di riduzione all'albero  $G$  relativamente allo spigolo  $e$ . Si ha  $G'_e = H \cup I_1$  ( $I_1$  coincide col vertice isolato  $u$ ) e  $G''_e = H$ . Quindi  $P(G''_e, x) = P(H, x)$  e, per il Teorema 10.3,  $P(G'_e, x) = P(H, x) \cdot P(I_1, x) = x^2(x-1)^{n-2}$ . Per il Teorema 10.4, abbiamo  $P(G, x) = P(G'_e, x) - P(G''_e, x) = x^2(x-1)^{n-2} - x(x-1)^{n-2} = x(x-1)^{n-1}$ .

Supponiamo adesso che  $G$  sia un grafo con  $n$  vertici avente il polinomio cromatico (9). Vogliamo provare che  $G$  è un albero. Per  $n = 1$  la tesi è evidente. Sia  $n > 1$ . Si ha

$$P(G, x) = x(x-1)^{n-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} (-1)^k,$$

cioè

$$P(G, x) = \binom{n-1}{0} x^n - \binom{n-1}{1} x^{n-1} + \binom{n-1}{2} x^{n-2} - \dots + \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} x.$$

Per il Teorema 10.5,  $G$  è connesso (in quanto la più piccola potenza di  $x$  in  $P(G, x)$  è 1) e ha  $n - 1$  spigoli (in quanto  $-(n - 1)$  è il coefficiente di  $x^{n-1}$ ). Per il Teorema 4.2,  $G$  è un albero. ■

Sfortunatamente, le proprietà elencate nei Teoremi 10.5 e 10.6 non sono sufficienti a caratterizzare i polinomi cromatici. Cioè non siamo in grado di rispondere alla seguente domanda: “Sia  $P(x)$  un polinomio in  $x$  verificante tutte le proprietà sopra elencate per un polinomio cromatico. Esiste un grafo  $G$  tale che  $P(G, x) = P(x)$ ?” Per esempio, consideriamo il polinomio  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ . Esso verifica le seguenti proprietà: il coefficiente di  $x^4$  è 1; il termine noto è nullo; la somma di tutti i coefficienti è 0; i coefficienti sono, alternativamente, di segno opposto; la potenza minima di  $x$  è 2. Tuttavia  $P(x)$  non è polinomio cromatico di alcun grafo  $G$ . Altrimenti,  $G$  dovrebbe avere 4 vertici, 4 spigoli e due componenti connesse. Questo è impossibile perchè un grafo avente 4 vertici e 2 componenti connesse ha al più 3 spigoli.

## Indice analitico

- ( $G$ ) con  $G$  multidigrafo, 8
- $A_{adj}$ , 14
- $A_{inc}$ , 14
- $I_n$ , 49
- $K_n$ , 5
- $K_{n,m}$ , 6
- $P(G, x)$ , 48
- $|G|$  con  $G$  multidigrafo, 8
- $\vec{G}$  con  $G$  multigrafo, 8
- $d(x)$ , 4
- $d_G(x)$ , 4
- $d_G^+(v)$ , 8
- $d_G^-(v)$ , 8
  
- Adiacente a in un digrafo, 4
- Albero, 19, 20
- Albero orientato, 30
- Arco, 3
  
- Cammino chiuso, 6
- Cammino elementare, 6
- Cammino euleriano, 33
- Cammino hamiltoniano, 35
- Cammino in un grafo, 6
- Cammino orientato, 9
- Cammino orientato chiuso, 9
- Cammino orientato elementare, 9
- Cammino orientato euleriano, 35
- Cammino semplice, 6
- Cammino semplice orientato, 9
- Cammino semplice orientato chiuso, 9
- Cappio, 3
- Ciclo, 7
- Ciclo orientato, 9
- Codice di Prüfer, 22
- Colorazione di un grafo, 46
- Componente connessa, 7
- Componente fortemente connessa di un digrafo, 9
- Contrazione, 45
- Contrazione dello spigolo  $\{x, y\}$ , 44
- Contrazione elementare, 44
  
- Digrafi isomorfi, 15
- Digrafo, 3
- Digrafo connesso, 9
- Digrafo euleriano, 35
- Digrafo fortemente connesso, 9
- Digrafo simmetricamente completo, 8
- Distanza da  $x$  a  $y$  in un digrafo fort. connesso, 9
- Distanza fra due vertici di un grafo, 7
  
- Estremi di un cammino, 6
  
- Faccia, 39
- Foresta, 19
- Foresta orientata, 30
- Formula di Eulero per i grafi planari., 39
  
- Grado di un vertice, 4
- Grado di un vertice di un digrafo, 8
- Grado-in, 8
- Grado-out, 8
- Grafi isomorfi, 15
- Grafi omeomorfi, 42
- Grafo, 3
- Grafo  $k$ -colorabile, 46
- Grafo aciclico, 7
- Grafo bipartito, 6
- Grafo bipartito completo, 6
- Grafo completo, 5
- Grafo connesso, 7
- Grafo contraibile, 45
- Grafo denso, 14
- Grafo di Petersen, 43
- Grafo euleriano, 33
- Grafo finito, 3
- Grafo hamiltoniano, 35
- Grafo orientato, 3
- Grafo planare, 38

Grafo regolare, 5  
 Grafo sconnesso, 7  
 Grafo semieuleriano, 33  
 Grafo semihamiltoniano, 35  
 Grafo sparso, 14  
  
 In-degree, 8  
 Incidente, 4  
 Incidente a, 4  
 Incidente da, 4  
 Indice di un multigrafo, 5  
 Invariante per isomorfismi, 16  
 Isomorfismo fra digrafi, 15  
 Isomorfismo fra grafi, 15  
  
 Liste di adiacenza, 14  
 Liste di incidenza, 14  
 Lunghezza di un cammino, 6  
 Lunghezza di un cammino orientato, 9  
 Lunghezza di un ciclo, 7  
  
 Matrice di adiacenza, 10  
 Matrice di incidenza di un digrafo, 13  
 Matrice di incidenza di un grafo, 12  
 Multidigrafo, 3  
 Multigrafo, 3  
 Multigrafo completo, 5  
 Multigrafo euleriano, 33  
 Multigrafo orientato euleriano, 35  
 Multigrafo regolare, 5  
 Multigrafo semieuleriano, 33  
  
 Nodo, 3  
 Numero cromatico, 47  
  
 Orientazione completa, 8  
 Orientazione di un multidigrafo, 8  
 Out-degree, 8  
  
 Path, 6  
 Path orientato, 9  
 Polinomio cromatico, 52  
 Problema dei quattro colori, 47  
  
 Radice, 9  
  
 Regione, 39  
  
 Sottodigrafo, 8  
 Sottodigrafo indotto, 8  
 Sottografo, 5  
 Sottografo indotto, 5  
 Spigolo orientato, 3  
 Suddivisione elementare, 42  
  
 Teorema dei quattro colori, 47  
 Teorema di Kuratowski, 43  
 Teorema di Wagner, 45  
 Teorema fondamentale di riduzione, 51  
  
 Underlying grafo, 8  
 Underlying multigrafo, 8  
  
 Vertice, 3  
 Vertice isolato, 4  
 Vertice pendente, 4  
 Vertici adiacenti, 4  
 Vertici confinanti, 4